

стояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузках // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 1. — С. 116–121. 4. Старовойтов Э.И. К изгибу круглой трехслойной металлополимерной пластинки // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1986. — Вып. 13. — С. 54–60. 5. Старовойтова Т.А. К изгибу двухслойных металлополимерных пластин // Проблемы прочности. — 1984. — № 3. — С. 100–104.

УДК 539.3

В.В. КОРОЛЕВИЧ (Минск)

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ДИАМЕТРА

Рассматривается тонкий сплошной полярно-ортотропный диск радиуса R_0 , вращающийся вокруг диаметра. Подобное вращение дисков происходит в расходемерах жидкостей и газов.

Нормальные σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и касательные $\tau_{r\theta}$ напряжения в диске выразим через функцию напряжений $F(r, \theta)$ [1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + U(r, \theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U(r, \theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь $U(r, \theta) = -\rho \omega^2 r^2 / 4 \cdot (1 + \cos 2\theta)$ — потенциал центробежных сил; ρ — плотность материала; $\omega = \text{const}$ — угловая скорость вращения диска; r, θ — полярные координаты.

Внешний край диска будем полагать свободным от усилий:

$$\sigma_{rr} |_{r=R_0} = 0, \quad \tau_{r\theta} |_{r=R_0} = 0. \quad (2)$$

Функция напряжений $F(r, \theta)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_\theta} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left(\frac{1}{G_{r\theta}} - \frac{2\nu_{r\theta}}{E_r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + \frac{2}{E_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \\ & - \left(\frac{1}{G_{r\theta}} - \frac{2\nu_{r\theta}}{E_r} \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left[2 \frac{(1-\nu_{r\theta})}{E_r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{G_{r\theta}} \right] \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\rho \omega^2}{2} \left\{ \left[2 \left(\frac{1}{E_\theta} - \frac{1}{E_r} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1 - \nu_{\theta r}}{E_{\theta}} + \frac{1 - \nu_{r\theta}}{E_r} \right) + \left[2 \left(\frac{1}{E_{\theta}} - \frac{1}{E_r} \right) + \left(\frac{1 - \nu_{\theta r}}{E_{\theta}} - \frac{1 - \nu_{r\theta}}{E_r} \right) \right] \cos 2\theta \} . \quad (3)$$

Решение уравнения (3) представим в виде

$$F(r, \theta) = \Phi_0(r) + \Phi_1(r) \cos 2\theta , \quad (4)$$

где

$$\Phi_0(r) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} r^2 + C_3^{(0)} r^{1+k} + C_4^{(0)} r^{1-k} + \frac{\rho \omega^2}{16} \left(\frac{3 - k^2 - 2\nu_{\theta r}}{9 - k^2} \right) r^4 ,$$

$$\Phi_1(r) = C_1^{(1)} r^{1+m_1} + C_2^{(1)} r^{1-m_1} + C_3^{(1)} r^{1+m_2} + C_4^{(1)} r^{1-m_2} - \frac{\rho \omega^2 r^4}{12} \psi(k, \lambda) ;$$

$$k = \sqrt{E_{\theta}/E_r} , \quad \lambda = k \sqrt{1 + 4(E_r/G_{r\theta} - 2\nu_{r\theta})} ,$$

$$m_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \lambda^2 + 6k} + \sqrt{1 + \lambda^2 - 6k}) ,$$

$$m_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \lambda^2 + 6k} - \sqrt{1 + \lambda^2 - 6k}) ,$$

$$\psi(k, \lambda) = \frac{2(k^2 - 1)}{[8 + (k^2 - \lambda^2)]} , \quad \lim_{k \rightarrow 1} \psi(k, \lambda) = 0 ,$$

$C_i^{(0)}$, $C_i^{(1)}$ — постоянные интегрирования.

Для случая сплошного диска нужно приравнять нулю постоянные $C_2^{(0)}$, $C_4^{(0)}$, $C_2^{(1)}$, $C_4^{(1)}$, а оставшиеся $C_3^{(0)}$, $C_1^{(1)}$, $C_3^{(1)}$ определить из граничных условий (2). Подставляя (4) в (1) и (2), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{2} \left(\frac{3 + \nu_{\theta r}}{9 - k^2} \right) \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^{k-1} - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{4} \left[(m_1 - 3) A \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_1 - 1} + (m_2 - 3) B \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_2 - 1} - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{2} \left(\frac{3 + \nu_{\theta r}}{9 - k^2} \right) \left[k \left(\frac{r}{R_0} \right)^{k-1} - \left(\frac{k^2 + 3\nu_{\theta r}}{3 + \nu_{\theta r}} \right) \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] + \\ &+ \frac{\rho \omega^2 R_0^2}{4} \left\{ m_1 (m_1 + 1) A \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_1 - 1} + m_2 (m_2 + 1) B \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_2 - 1} - \dots \right\} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[1 + 4\psi(k, \lambda) \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \cos 2\theta, \\
 \tau_{r\theta} = & \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2} \left[m_1 A \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_1-1} + m_2 B \left(\frac{r}{R_0} \right)^{m_2-1} - \right. \\
 & \left. - \psi(k, \lambda) \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right] \sin 2\theta,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{(m_1 - m_2)} \left[\frac{1 - \psi(k, \lambda)}{3} m_2 + \psi(k, \lambda) \right], \\
 B &= - \frac{1}{(m_1 - m_2)} \left[\frac{1 - \psi(k, \lambda)}{3} m_1 + \psi(k, \lambda) \right].
 \end{aligned}$$

Из (5) при $k = 1$, $\nu_{r\theta} = \nu_{\theta r} = \nu$, $G_{r\theta} = G = E/[2(1 + \nu)]$, $\psi(1, \lambda) = 0$ имеем известное распределение напряжений во вращающемся вокруг диаметра сплошном изотропном диске [2].

Напряжения в центре диска из материалов, у которых k , m_1 , m_2 больше единицы, равны нулю, а максимальное напряжение имеет место на внешнем крае диска:

$$\sigma_{\theta\theta}^{\max} = \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{2} \frac{k - \nu_{\theta r}}{3 + k} + \frac{\rho\omega^2 R_0^2}{4} (k - 1) \frac{\sqrt{1 + \lambda^2 + 6k} - (k - 1)}{\sqrt{1 + \lambda^2 + 6k} + (k + 3)} \cos 2\theta.$$

На рис. 1 приведена эпюра окружного напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ на краю диска, выполненного из углепластика со следующими упругими постоянными [3]: $E_{\theta} = 1,53 \cdot 10^{12}$ Па; $E_r = 9,35 \cdot 10^9$ Па; $G_{r\theta} = 6,79 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{r\theta} = 0,01$; $\nu_{\theta r} = 0,33$; $k = 12,8$; $\lambda = 32,45$. Максимальные напряжения при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 180^\circ$ имеют положительный знак, что свидетельствует о растяжении слоев углепластика. При $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 270^\circ$ напряжения отрицательны, т. е. в этих точках слои сжаты. Угол, при котором меняется знак окружных напряжений на краю диска, составляет приблизительно 54° .

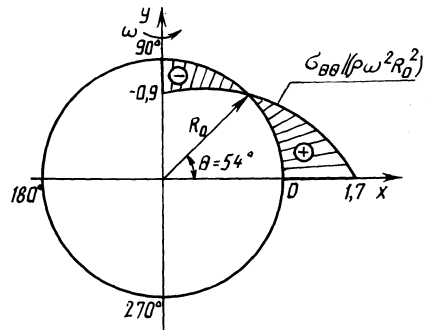


Рис. 1. Эпюра окружных напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ на внешней границе диска из углепластика

Если хотя бы один из показателей k , m_1 , m_2 материала меньше единицы, напряжения по мере приближения к центру диска возрастают, т. е. около полюса анизотропии будет иметь место концентрация напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. — М., 1957. — 463 с. 2. Нодге Р.Г., Бруклин Н.У. Stress Functions for Rotating Plates // J. of Appl. Mech. — 1956. — Vol. 23, №2. — P. 273–275. 3. Shiratori E., Ikegami K., Ishill T. Study on the High Speed Rotating Disc Reinforced by Laminating and Hoop Winding Method // Bull. ISME. — 1981. — Vol. 24, №189. — P. 501–506.

УДК 539.3:518.6

В.С. РОМАНЧИК, канд. физ.-мат. наук,
НГУЕН ТИЕН КХИЕМ (БГУ)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается применение метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) в решении задачи колебания упругих пластин при случайных нагрузках.

Пусть пластина находится под действием нормальных нагрузок с интенсивностью $q(r, t)$ и таких нагрузок в ее срединной плоскости, что внутренние усилия T_1 , T_2 постоянны и равны p . Тогда уравнение поперечных колебаний пластины можно записать так:

$$D\Delta^2 W(r, t) + p\Delta W(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = q(r, t), \quad (1)$$

где $W(r, t)$ — поле прогибов; $r = (x, y) \in S$; S — область на плоскости, занимаемая пластиной; D , h , ρ — соответственно цилиндрическая жесткость, толщина пластины и плотность материала.

Рассмотрим случай, когда q — стационарный временно-пространственный случайный процесс [1]. Согласно теории таких случайных процессов,

$$q(r, t) = q_0(r) + \int_{-\infty}^{\infty} Q(r, \omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $q_0(r) = \langle q(r, t) \rangle$ — математическое ожидание; Q — случайное поле, обладающее свойством стохастической ортогональности:

$$\langle Q^*(r, \omega) Q(r', \omega') \rangle = S_q(r, r', \omega) \delta(\omega - \omega').$$

Знак $\langle \cdot \rangle$ обозначает оператор усреднения по вероятности, $*$ — комплексную сопряженность. Тензор S_q называется спектром пространственной корреляции случайного поля $q(r, t)$.