

$$\begin{aligned} \{V(z)\}^+ = 0, \quad z \in S_k \quad k = 0, 1, \dots, r; \{V(z)\}^\pm = 0, \quad z \in \sigma_j, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \{T_z V(z)\}^+ = 0, \quad z \in S_k, \quad k = r + 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Согласно теореме единственности,  $V(x) \equiv 0, \quad \forall x \in D$ . Отсюда  $\lim_{x \rightarrow z} V(x) = 0, \quad z \in S_k, \quad x \in D_k, \quad k = r + 1, \dots, m$ . Кроме того,  $V(x)$  удовлетворяет уравнениям моментной теории упругости в области  $D_k, \quad k = r + 1, \dots, m$ . Следовательно,  $V(x) = 0$  для любых  $x \in D_k, \quad k = r + 1, \dots, m$ . Но тогда  $4\varphi_k(z) = [T_z V(z)]_{D_k}^+ - [T_z V(z)]_{D_k}^- \equiv 0, \quad z \in S_k, \quad k = r + 1, \dots, m$ , т. е.  $\varphi_k(y) = 0$ .

Таким образом, установлено что смешанная задача моментной теории упругости однозначно разрешима. Ее решение представляется формулой (1), где плотности  $\varphi_k(y)$  находятся из системы интегральных уравнений (2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелайшвили, Т.В.Бурчуладзе. — М., 1976. — 664 с. 2. Мартыненко М.Д., Ющенко Д.П. Граничные задачи моментной теории упругости в областях со щелями // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 271, № 4. — С. 841–845.

УДК 539.374

В.В. ХАРИТОНОВ, д-р техн. наук,  
Э.И. СТАРОВОЙТОВ, А.И. ЮРОКИН, кандидаты физ.-мат. наук,  
Ю.В. БОГОРОДСКИЙ, канд. техн. наук (БелИИЖТ),  
Т.А. СТАРОВОЙТОВА, канд. физ.-мат. наук (ГПИ)

### ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

В настоящее время в рамках теории малых упругопластических деформаций [1] и теории переменного нагружения [2] рассмотрены постановки задач и получены решения для двухслойных пластин. При этом учтены реономные, пластические и другие физические свойства материалов слоев [3]. Трехслойные несимметричные по толщине пластины исследованы только при однократном квазистатическом нагружении [4]. Ниже показана возможность построения одного решения краевой задачи для круглой трехслойной пластинки при знакопеременном ее нагружении.

1. Нагружение несимметричной по толщине круглой трехслойной пластинки, геометрические гипотезы для которой в случае малых деформаций соответствуют модели Э.И. Григолюка, подробно рассмотрено в [4]. При этом были использованы уравнения состояния:

$$s_a^k = 2G_0^k (\mathfrak{E}_a^k f^k (\epsilon_u^k) - \int_0^t \Gamma^k(t - \tau) f^k(\epsilon_u^k) \mathfrak{E}_a^k(\tau) d\tau,$$

$$\sigma^k = 3K_0^k \epsilon^k,$$

где  $k = 1, 2, 3$  – номер слоя; обозначенные греческими буквами индексы принимают значения  $r, \varphi$ ;  $s_a^k, \sigma^k, \varepsilon_a^k, \epsilon^k$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G_0, K_0$  – константы упругости;  $\Gamma^k(t)$  – ядра сдвиговой релаксации;  $t$  – время;  $\epsilon_u^k$  – интенсивность деформаций;  $f^k(\epsilon_u^k) \equiv 1 - \omega^k(\epsilon_u^k)$ ,  $\omega^k$  – универсальные функции нелинейности и пластичности, которые определяются экспериментально [2, 5].

В соответствии с (1),  $\omega^k(\epsilon_u^k) \equiv 0$  при  $\epsilon_u^k \leq \epsilon_s^k$  и материалы слоев деформируются линейно: несущих – упруго, заполнителя – вязкоупруго. При  $\epsilon_u^k > \epsilon_s^k$  несущие слои проявляют вязкоупругопластические свойства, заполнитель – нелинейно вязкоупругие. На границе областей  $\epsilon_u^k = \epsilon_s^k$ . Касательные напряжения  $\sigma_{rz}^{(3)}$  и относительные сдвиги  $\psi_a = 2\varepsilon_{az}^{(3)}$  в заполнителе связаны соотношениями типа (1).

Распределенную по поверхности пластинки нагрузку  $q = q(r, t)$  считаем осесимметричной. Согласно принятым гипотезам, перемещения в слоях линейно зависят от прогиба пластинки, радиального перемещения координатной плоскости  $u(r, t)$  (срединной поверхности заполнителя) и относительного сдвига  $\psi(r, t)$ . Для определения этих трех функций используются уравнения равновесия в обобщенных внутренних усилиях и граничные условия. В [4] предложены и применены итерационные методы решения рассматриваемой задачи, базирующиеся на методе упругих решений А.А. Ильюшина [1].

2. Пусть теперь, начиная с момента времени  $t = t_1$ , осуществляется мгновенная разгрузка пластинки и последующее приложение нагрузки противоположного знака, изменяющейся по тому же закону, что и при основном нагружении. Следуя [2, 3], введем разности (штрих вверху – прямое нагружение, два штриха – обратное):

$$\left. \begin{aligned} s_a^*(t_*) &= s_a'(t) - s_a''(t), \quad \varepsilon_a^*(t_*) = \varepsilon_a'(t) - \varepsilon_a''(t), \\ w^*(t_*) &= w'(t) - w''(t), \quad q^*(t_*) = q'(t_1) - q''(t), \\ t_* &= t - t > 0, \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $s_a'(t), \dots$  – напряжения и т. д. от постоянной внешней нагрузки, зафиксированной в момент времени  $t_1$ .

В соответствии с теорией переменного нагружения В.В. Москвитина [2, 3], для величин, отмеченных звездочкой, можно записать уравнения состояния типа (1). Участки физической нелинейности на диаграмме  $\sigma_u^{k*} - \epsilon_u^{k*}$  будут описывать универсальные функции  $\omega^{k*}(\epsilon_u^{k*})$ , определяемые экспериментально. Соотношения, отражающие связь деформаций с искомыми перемещениями [4], сохраняют свой линейный вид. То же имеет место и для уравнений равновесия и для условий на контуре. В этом случае краевая задача для величин со звездочками совпадает с соответствующей задачей основного нагружения. Предположив одинаковый аналитический вид функций нелинейности (они могут отличаться константами  $a_m^k$ , входящими в аппроксимационные формулы), можно найти  $u^*, \psi^*, w^*$ , не решая соответствующую краевую задачу, если

известны  $u', \psi', w'$ . При этом достаточно в формулах для последних заменить  $q', \epsilon_s^k, a_m^k$  и  $t$  на  $q^*, \epsilon_s^{k*}, a_m^{k*}, t^*$ .

После определения величин со звездочками искомые решения следуют из соотношений типа (2):

$$u'' = u' - u^*, \quad \psi'' = \psi' - \psi^*, \quad w'' = w' - w^* . \quad (3)$$

Для произвольного  $n$ -го нагружения.

$$u^n = u' + \sum_{i=2}^n (-1)^{i-1} u^{i*}, \dots$$

3. На ЭВМ ЕС 1022 по программе, составленной для краевой задачи при основном нагружении [4], и в соответствии с методикой (2), (3) произведена численная реализация решения задачи. В качестве материала несущих слоев пластинки принимался алюминиевый сплав Д-16Т, наполнитель – политетрафторэтилен. Результаты обработки соответствующих экспериментальных данных содержатся в [5]. При знакопеременном нагружении ( $q'' = -q' = \text{const}$ ) учтены эффекты упрочнения дуралюмина ( $\epsilon_s^* = 2,02\epsilon_s'$ ) и обратной ползучести фторопласта ( $\epsilon_s^{(3)*} = 2\epsilon_s^{(3)'}).$  Нагрузка ( $q = 1,5 \cdot 10^7$  Па), время ее действия ( $t_1 = t_{*1} = 25$  мин) и относительные толщины слоев пластинки ( $c = 0,15, h_1 + h_2 = 0,1$ ) подбирались таким образом, чтобы нелинейные и реономные свойства материалов проявлялись в достаточной степени.

Отмечается достаточно быстрая сходимость метода последовательных приближений типа метода упругих решений. Максимальное отклонение результатов 4-го и 5-го приближений не превышает 2,4 %. Максимальная погрешность удовлетворения уравнений равновесия составляет 4 %. Граничные условия выполняются точно.

Рис. 1 показывает изменение относительного сдвига и прогиба по радиусу пластинки, защемленной по краю (на приведенных рисунках номера кривых

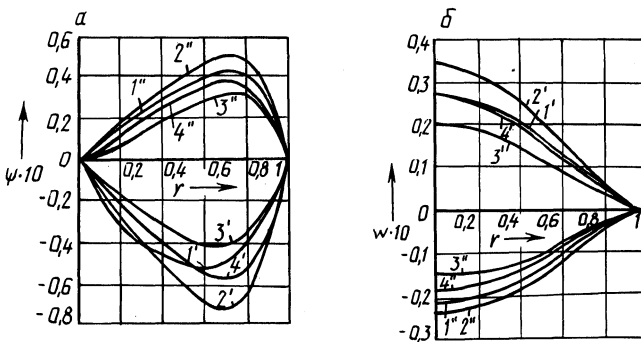


Рис. 1. Относительный сдвиг  $\psi$  в наполнителе (а) и прогиб  $w$ , отнесенный к радиусу (б), при знакопеременном нагружении пластинки:

1, 2 –  $h_1 = h_2 = 0,05$ ; 3, 4 –  $h_1 = 0,08$ ;  $h_2 = 0,02$

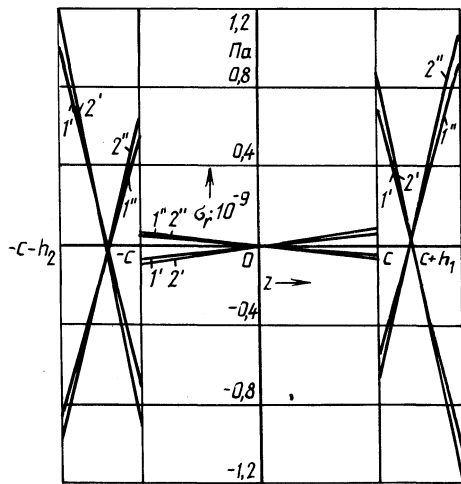


Рис. 2. Изменение радиальных напряжений  $\sigma_r$  по толщине пластинки на ее краю ( $h_1 = h_2 = 0,05$ )

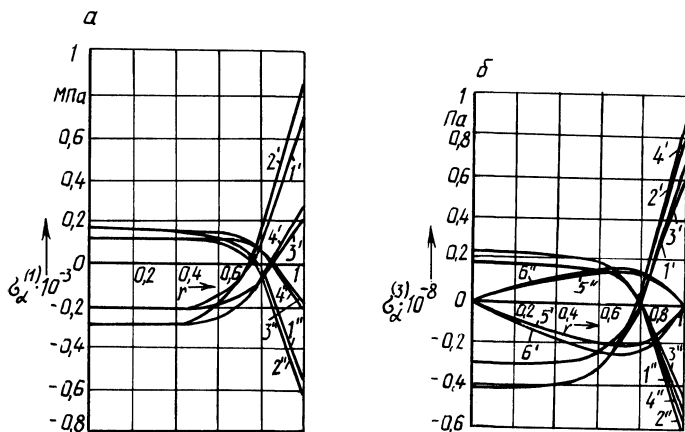


Рис. 3. Напряжения в несущем слое (пластинки) (а) и в заполнителе (б) в месте склейки слоев:

1, 2 -  $\sigma_r$ ; 3, 4 -  $\sigma_\varphi$ ; 5, 6 -  $\sigma_{rz}$  ( $h_1 = h_2 = 0,05$ )

с одним штрихом соответствуют прямому нагружению, с двумя штрихами — обратному; нечетные номера кривых — начальному моменту приложения нагрузки, четные —  $t' = t_1$ ,  $t'' = t_{*1}$ ). Максимальные значения  $\psi$  и  $w$  при знакопеременном нагружении уменьшаются на 30...32%. Радиальные напряжения  $\sigma_r$  превосходят тангенциальные  $\sigma_\varphi$  и достигают максимума в заделке (рис.2). На рис. 3 приведены напряжения в месте склейки слоев, необходимые для проведения прочностных расчетов для предупреждения расслоения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И л ь ш и н А.А. Пластичность. — М., 1948. — 376 с. 2. М о с к в и т и н В.В. Циклические нагружения элементов конструкций. — М., 1981. — 344 с. 3. М о с к в и т и н В.В., С т а р о в о й т о в Э.И. К исследованию напряженно-деформированного со-

стояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагрузках // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 1. — С. 116–121. 4. Старовойтов Э.И. К изгибу круглой трехслойной металлополимерной пластинки // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1986. — Вып. 13. — С. 54–60. 5. Старовойтова Т.А. К изгибу двухслойных металлополимерных пластин // Проблемы прочности. — 1984. — № 3. — С. 100–104.

УДК 539.3

В.В. КОРОЛЕВИЧ (Минск)

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛЯРНО-ОРТОТРОПНОГО ДИСКА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ДИАМЕТРА

Рассматривается тонкий сплошной полярно-ортотропный диск радиуса  $R_0$ , вращающийся вокруг диаметра. Подобное вращение дисков происходит в расходемерах жидкостей и газов.

Нормальные  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$  и касательные  $\tau_{r\theta}$  напряжения в диске выразим через функцию напряжений  $F(r, \theta)$  [1]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + U(r, \theta), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U(r, \theta), \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $U(r, \theta) = -\rho \omega^2 r^2 / 4 \cdot (1 + \cos 2\theta)$  — потенциал центробежных сил;  $\rho$  — плотность материала;  $\omega = \text{const}$  — угловая скорость вращения диска;  $r, \theta$  — полярные координаты.

Внешний край диска будем полагать свободным от усилий:

$$\sigma_{rr} |_{r=R_0} = 0, \quad \tau_{r\theta} |_{r=R_0} = 0. \quad (2)$$

Функция напряжений  $F(r, \theta)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в частных производных [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_\theta} \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + \left( \frac{1}{G_{r\theta}} - \frac{2\nu_{r\theta}}{E_r} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + \frac{2}{E_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} - \\ & - \left( \frac{1}{G_{r\theta}} - \frac{2\nu_{r\theta}}{E_r} \right) \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \left[ 2 \frac{(1-\nu_{r\theta})}{E_r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{G_{r\theta}} \right] \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{E_r} \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\rho \omega^2}{2} \left\{ \left[ 2 \left( \frac{1}{E_\theta} - \frac{1}{E_r} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$