УДК 517.946:539.3

Д.П. ЮЩЕНКО, канд. физ.-мат. наук
(ГГУ)

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ СО ЩЕЛЯМИ

Основные краевые задачи моментной теории упругости изучены для областей, ограниченных только замкнутыми поверхностями [1]. В предлагаемой работе исследуется одна смешанная задача для многосвязных областей со щелями. Все обозначения – из [1].

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – область с границей $S = \bigcup_{k=0}^{m} S_k$ и $\sigma = \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j$, причем S_k и σ_j являются соответственно замкнутыми и незамкнутыми поверхностями класса $\Lambda_1(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. (Поверхность σ_j имеет простой замкнутый край γ_j). Предполагается, что только S_0 включает все остальные поверхности и, кроме того, две различные поверхности не имеют общих точек и не охватывают друг друга. Через D_k обозначим конечную область с границей S_k. За положительную нормаль к S примем внешнюю по отношению к области D, а на σ – любую фиксированную.

В области D требуется определить регулярное решение [2] уравнений моментной теории упругости [1], удовлетворяющее краевым условиям:

$$\{U(z)\}^+ = f_k(z)\ ,\quad z \in S_k\ ,\quad k = 0, 1, \dots, r\ ,\quad 0 \leqslant r < m\ ;$$

$$\{T_z U(z)\}^+ = f_k(z)\ ,\quad z \in S_k\ ,\quad k = r+1, \dots, m\ ;$$

$$\{U(z)\}^{\pm} = f_j^{\pm}(z)\ ,\quad z \in \gamma_j\ ,\quad j = 1, 2, \dots, n\ ,$$

где $f_k(z)$, $f_j^+(z)$ и $f_j^-(z)$ принадлежат классу $C^{1,\beta}$, $0 < \beta < \alpha < 1$, причем $f_j^+(z) = f_j^-(z)$ для точек $z \in \gamma_j$; T_z – оператор моментного напряжения [1]. Через $\{\cdot\}^+$ и $\{\cdot\}^-$ обозначены предельные значения соответствующих величин по направлению положительных или отрицательных нормалей к поверхностям.

Единственность решения поставленной задачи непосредственно следует из формулы Грина для многосвязных областей со щелями.

Докажем существование решения. Пусть $D^{(r)} = D_0 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{r} \overline{D}_k \bigcup_{j=1}^{n} \sigma_j \right)$, а $G(x, y)$ – тензор Грина в первой основной задаче для многосвязной области со щелями $D^{(r)}$. Существование тензора $G(x, y)$ следует из результатов работы [2].

Решение задачи ищем в виде

$$U(x) = \sum_{k=r+1}^{m} \int_{S_k} G(x, y)\, \varphi_k(y)\, d_y S - \sum_{k=0}^{r} \int_{S_k} [T_y G(y, x)]' f_k(y) d_y S +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{\sigma_j^-}[T_yG(y,x)]'f_j^-(y)\,d_y\sigma-\int_{\sigma_j^+}[T_yG(y,x)]'f_j^+(y)\,d_y\sigma\right\}, \quad (1)$$

где $\varphi_k\in C^{0,\alpha}(S_k)$, $k=r+1,\dots,m$ являются неизвестными векторами, а σ_j^+ и σ_j^- - стороны поверхности σ_j, соответствующие приближению к этой поверхности по направлению положительной и отрицательной нормалей соответственно.

Очевидно, что на основании свойств тензора $G(x,y)$ все условия смешанной задачи удовлетворяются, кроме граничного условия на поверхностях S_k, $k=r+1,\dots,n$. Для удовлетворения последних формируем систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{2}\varphi_p(z)+\sum_{k=r+1}^{m}\int_{S_k}[T_zG(z,y)]\,\varphi_k(y)\,d_yS=\overline{f_p}(z), \quad (2)$$
$$z\in S_p,\ p=r+1,\dots,m,$$

где

$$\overline{f_p}(z)=f_p(z)+T(\partial_z,\nu)\Big[\sum_{k=0}^{r}\int_{S_k}[T_yG(y,z)]'f_k(y)\,d_yS+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(\int_{\sigma_j^-}[T_yG(y,z)]'f_j^-(y)\,d_y\sigma-\int_{\sigma_j^+}[T_yG(y,z)]'f_j^+(z)\,d_y\sigma\Big)\Big].$$

Легко видеть, что $\overline{f_p}(z)\in C^{0,\alpha}\big(\bigcup_{k=r+1}^{m}S_k\big)$. На основании определения тензора Грина, ядро уравнений (2) при $z,y\in\bigcup_{k=r+1}^{m}S_k$ представимо в виде

$$T_zG(z,y)=\frac{1}{2}T_z\,\psi(z-y)+P(z,y),$$

где $\psi(z-y)$ – классическая матрица фундаментальных решений; $P(z,y)$ – регулярная матрица.

Следовательно, система (2) представляет собой систему сингулярных интегральных уравнений. Подобные системы изучены в [1], где уравнения отличаются от (2) только вполне непрерывным слагаемым. Можно утверждать, что для системы (2) справедлива классическая теория Фредгольма.

Уравнения (2) однозначно разрешимы. Для этого достаточно показать, что соответствующая система однородных уравнений имеет тривиальное решение.

Пусть $\varphi_k(y)$ – ненулевое решение системы (2). Рассмотрим потенциал

$$V(x)=\sum_{k=r+1}^{n}\int_{S_k}^{n}G(x,y)\,\varphi_k(y)\,d_yS.$$

Легко видеть, что $V(x)$ является регулярным решением уравнений моментной теории упругости в области D и

$$\{V(z)\}^{+} = 0, \quad z \in S_k \quad k = 0, 1, ..., r; \{V(z)\}^{\pm} = 0, \quad z \in \sigma_j, \ j = 1,2,...n;$$

$$\{T_z V(z)\}^{+} = 0, \quad z \in S_k, \quad k = r+1, ..., m .$$

Согласно теореме единственности, $V(x) \equiv 0, \quad \forall X \in D$. Отсюда $\lim\limits_{x \to z} V(x) = 0, \ z \in S_k, \ x \in D_k, \ k = r+1, ..., m$. Кроме того, $V(x)$ удовлетворяет уравнениям моментной теории упругости в области D_k, $k = r+1, ..., m$. Следовательно, $V(x) = 0$ для любых $x \in D_k$, $k = r+1, ..., m$. Но тогда $4\varphi_k(z) = [T_z V(z)]^{+}_{D_k} - [T_z V(z)]^{-}_{D_k} \equiv 0, \ z \in S_k, \ k = r+1, ..., m$, т. е. $\varphi_k(y) = 0$.

Таким образом, установлено что смешанная задача моментной теории упругости однозначно разрешима. Ее решение представляется формулой (1), где плотности $\varphi_k(y)$ находятся из системы интегральных уравнений (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости / В.Д.Купрадзе, Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе. – М., 1976. – 664 с. 2. Мартыненко М.Д., Ющенко Д.П. Граничные задачи моментной теории упругости в областях со щелями // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 4. – С. 841–845.

УДК 539.374

В.В. ХАРИТОНОВ, д-р техн. наук,
Э.И. СТАРОВОЙТОВ, А.И. ЮРОКИН, кандидаты физ.-мат. наук,
Ю.В. БОГОРОДСКИЙ, канд. техн. наук (БелИИЖТ),
Т.А. СТАРОВОЙТОВА, канд. физ.-мат. наук (ГПИ)

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЙ ИЗГИБ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ МЕТАЛЛОПОЛИМЕРНОЙ ПЛАСТИНКИ

В настоящее время в рамках теории малых упругопластических деформаций [1] и теории переменного нагружения [2] рассмотрены постановки задач и получены решения для двухслойных пластин. При этом учтены реономные, пластические и другие физические свойства материалов слоев [3]. Трехслойные несимметричные по толщине пластины исследованы только при однократном квазистатическом нагружении [4]. Ниже показана возможность построения одного решения краевой задачи для круглой трехслойной пластинки при знакопеременном ее нагружении.

1. Нагружение несимметричной по толщине круглой трехслойной пластинки, геометрические гипотезы для которой в случае малых деформаций соответствуют модели Э.И. Григолюка, подробно рассмотрено в [4]. При этом были использованы уравнения состояния:

$$s^k_a = 2G^k_0 (Э^k_a f^k(\epsilon^k_u) - \int\limits_0^t \Gamma^k(t-\tau) f^k(\epsilon^k_u) Э^k_a(\tau) d\tau,$$