

Подставляя (5), (6) в (2), получим замкнутую систему уравнений относительно неизвестных  $\sigma_{ij}$  и  $\partial S/\partial x_j$ .

Если ограничиться формулами (2) и (5), то на основе рассматриваемого метода можно получить систему интегродифференциальных уравнений для определения составляющих тензора напряжений в области  $D$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. П о б е д р я Б.Е. Новая постановка задачи МДТТ в напряжениях // Докл. АН СССР. — 1980. — Т. 253, № 2. — С. 295–297.
2. Р в а ч е в В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. — Киев, 1982. — 551 с.
3. М а р т ы н е н к о М.Д., Ж у р а в к о в М.А., К н я з е в а Л.П. Интегральные уравнения пространственных задач теории упругости и их численно-аналитическая реализация // Вычислительные методы и математическое моделирование. — М., 1984. — 219 с.
4. Н и к о л ь с к и й С.М. Курс математического анализа. — М., 1973. — Т. 2. — 391 с.
5. П а р т о н В.З., П е р л и н П.И. Интегральные уравнения теории упругости. — М., 1977. — 311 с.

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, И.С. СОЛОДУХА (БГУ)

### К РЕШЕНИЮ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Одной из разновидностей метода последовательных приближений решения упругопластических задач является метод дополнительных нагрузок. Уравнения равновесия, полученные в результате использования этого метода, имеют следующий вид [1]:

$$\mu \Delta u_m + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_m} + X_m + X_m^0 = 0, \quad (1)$$

где

$$X_m^0 = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ (2\mu + \frac{1}{\psi}) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \right] + \sum_{j \neq m=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\mu - \frac{1}{2\psi}) \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) \right] \right\}; \quad (2)$$

$\psi = 3/2 \cdot \epsilon_i / \sigma_i$ ;  $\epsilon_i, \sigma_i$  — интенсивность соответственно деформаций и напряжений;  $m = \overline{1, n}$ ;  $n = 2; 3$ .

Присоединив к уравнениям (1) граничные условия на  $S$  в виде [1]

$$\lambda \theta n_m + \mu \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_m}{\partial x_k} n_k + \mu \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_m} n_k = X_{\nu m} + X_{\nu m}^{(0)}, \quad (3)$$

где

$$X_{\nu m}^{(0)} = \sum_{j \neq m} (G - \frac{1}{2\psi}) \left[ \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) n_j \right] +$$

$$+ (2G - \frac{1}{\psi}) \left[ \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] n_m, \quad (4)$$

получим систему уравнений (1), (3), позволяющую решать задачи теории пластичности в перемещениях.

Поскольку задача (1)...(4) имеет множество решений, для устранения возникающей неопределенности граничные условия (3) в ее постановке должны быть дополнены условиями разрешимости задачи. В качестве таковых можно задать условия равновесия тела при действии приложенных к нему сил на каждом этапе использования метода упругих решений.

Если дополнительные слагаемые известны, получим систему уравнений в перемещениях, куда будут входить объемные ( $X_k^{(0)}$ ) и поверхностные ( $X_{\nu k}^{(0)}$ ) силы ( $k = \overline{1, \nu_0}$ ).

Воспользовавшись методом квазифункций Грина [2, 3], из (1) можно получить следующую систему нелинейных интегродифференциальных уравнений для определения неизвестного вектора перемещений  $\bar{u}_k$  и объемного расширения  $\theta$  тела в области  $D$  с границей  $S$ :

$$\begin{aligned} u_k(x) = & - \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_S u_k(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} F(x, \xi) d_\xi S - \\ & - \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D u_k(\eta) \Delta \eta d_\eta D - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta_k} F(x, \eta) d_\eta D + \\ & + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_k(\eta) + X_k^{(0)}(\eta)}{\mu} F(x, \eta) d_\eta D, \quad (5) \\ \theta(x) = & \sum_{k=1}^n \frac{-1}{2\pi(n-1)} \frac{\partial}{\partial x_k} \int_S u_k(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} F(x, \xi) d_\xi S - \\ & - \frac{1}{2\pi(n-1)} \sum_{k=1}^n \int_D u_k(\eta) \frac{\partial}{\partial x_k} \Delta \eta q(x, \eta) d_\eta D - \\ & - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} F(x, \eta) d_\eta D + \\ & + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \sum_{k=1}^n \left( \frac{X_k + X_k^{(0)}}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, \eta) d_\eta D, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $F(x, \xi)$  – квазифункция Грина:

$$F(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{r} - q(x, \xi), & n = 3, \\ \ln \left[ \frac{1}{r} - q(x, \xi) \right], & n = 2; \end{cases}$$

$$q(x, \xi) = \begin{cases} [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-1/2}, & n = 3, \\ \ln [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-1/2}, & n = 2; \end{cases}$$

$\omega(x)$  – нормализованное до 1-го порядка уравнение границы  $S$  [2],  $\kappa = 1/[2(1 - 2\mu)]$ ,  $n_\xi$  – внешняя нормаль в точке  $\xi$  границы  $S$ .

Можно доказать [2], что при соответствующем выборе уравнения границы области  $D$  уравнения (5) и (6) будут иметь сингулярную особенность ядра. В этом случае уравнения (2)...(6) можно решить методом последовательных приближений, причем в первом приближении можно положить равными нулю все дополнительные объемные и поверхностные силы. Последующие приближения строятся по общепринятой схеме [1], при этом каждое приближение должно быть построено с учетом сделанного выше замечания относительно учета разрешимости задачи.

Если использовать зависимость между интенсивностью деформаций и напряжений в форме  $\sigma_i = 3\mu\epsilon_i [1 - \omega_i(\epsilon_i)]$  [4], выражения (2) и (4) для дополнительных объемных  $X_m^{(0)}$  и поверхностных  $X_{\nu m}^{(0)}$  нагрузок примут следующий вид:

$$\begin{aligned} X_m^{(0)} &= \mu [\omega_i \Delta u_m + \frac{1}{3} \omega_i \frac{\partial \theta}{\partial x_m} + \frac{4}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_i} \sum_{k, k \neq m} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \\ &+ \sum_{k \neq m=1}^3 \frac{\partial \omega_i}{\partial x_k} (\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m})]; \\ X_{\nu m}^{(0)} &= \mu \omega_i [(2 \frac{\partial u_m}{\partial x_m} - \frac{2}{3} \theta) n_m + \sum_{k \neq m=1}^n (\frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_m}) n_k]. \end{aligned}$$

В этом случае методом последовательных приближений находится функция  $\omega_i$ , которую вначале полагаем равной нулю [1].

Итак, исходная задача (1)...(3) сведена к решению системы нелинейных сингулярных интегродифференциальных уравнений (5) и (6), которые допускают численную реализацию их на ЭВМ. Решение может быть получено методом последовательных приближений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С., Можаровский И.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев, 1981. – 411 с. 2. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. – Киев, 1982. – 551 с. 3. Мартыненко М.Д., Журавков М.А., Князева Л.П. Интегральные уравнения пространственных задач теории упругости и их численно-аналитическая реализация // Вычислительные методы и математическое моделирование. – М., 1984. – С. 29. 4. Ильюшин А.А. Пластичность. – М., 1963. – 272 с.