3. Подтверждается предположение [2] о преимуществах способа задания поверхностных условий в интегральной форме перед точечной (решение 5 теряет устойчивость при $NM = 8$, что не наблюдается для решения 4).

4. Расширение поверхностных условий путем приравнивания нулю выражений при одинаковых степенях z в разложении σ_r и τ_{rz} на участке поверхности $r = 0{,}1$ м ($0 \leqslant z \leqslant 0{,}1$ м) влияния на сходимость по энергии приближенного решения к точному не оказывает.

Анализ степени выполнения краевых условий, осуществляемый по эпюрам напряжений (рис. 3), показывает, что приближенные решения 1, 2, 3 не удовлетворяют краевым условиям на участке поверхности $r = 0{,}1$ м ($0 \leqslant z \leqslant 0{,}1$ м).

Преимущество решения 4 перед решением 5 видно на графике $\sigma_r|_{r=0{,}05}$, а также из расчета среднеквадратической погрешности отклонения σ приближенного решения от точного: для решения 4 $\sigma = 0{,}0252725$, для решения 5 $\sigma = 0{,}0272928$ ($r = 0{,}05$ м; $z_1 = 0{,}06...0{,}09$).

На участках поверхности $0 \leqslant r \leqslant 0{,}05$; $z = 0{,}05$ и $0{,}05 \leqslant r \leqslant 0{,}1$, $z = 0{,}1$ м минимальные среднеквадратические погрешности дает решение 4: $\sigma_1 = 0{,}0795$, $\sigma_2 = 0{,}022$. Так как в решении 4 уравнения внутренних связей исключались из системы (2), выполнена проверка условий равновесия элементарных объемов. При подстановке рассчитанных обобщенных перемещений в уравнения внутренних связей относительная погрешность составляет примерно 10^{-5}.

Итак, 1) при наличии участков поверхности, свободных от напряжений, желательно задавать поверхностные условия приравниванием нулю выражений при одинаковых степенях z, что способствует значительному повышению точности решения; 2) предпочтительно задание поверхностных связей (а не внутренних).

ЛИТЕРАТУРА

1. Звонарев Е.В., Кондратюк В.Ф. Приближенный расчет напряженного состояния матрицы с использованием вариационного уравнения Лагранжа // Порошковая металлургия. – Минск, 1978. – Вып. 2. – С. 75–79. 2. Крушевский А.Е., Луцко Н.Я. Построение алгоритма и пакета программ на ЭВМ для решения осесимметричных статических задач теории упругости в цилиндрических координатах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1986. – Вып. 13. – С. 35–41.

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ (БГУ)

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА (МЕТОДА В.Л. РВАЧЕВА) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ

Рассматривается задача об определении поля напряжений в изотропном теле, характеризуемом постоянными Ламе λ и μ. Предполагается, что тело занимает область $D \subset E_3$ и находится под действием поверхностной нагрузки T_{n_i}, распределенной по $s = \partial D$ и массовых сил с объемной плотностью $\rho_i(x)$.

Задача сводится к определению тензора напряжений $\|\sigma_{ij}\|_{3\times 3}$, компоненты которого удовлетворяют в области D уравнениям Бельтрами–Митчелла

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\nu}{1-\nu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho_k(x)X_k(x)\right]\delta_{ij} - $$

$$-\frac{\partial\left[\rho_i(x)X_i(x)\right]}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\rho_i(x)X_j(x)\right] \qquad (1)$$

при следующих условиях на S:

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} - \rho_i(x)X_i(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}n_j = T_{n_j}. \qquad (2)$$

Здесь $S = \sum_{k=1}^{3}\sigma_{kk}$, $\rho_i(x)X_i(x)$ – составляющие массовых сил по осям x_i.

Строгое математическое обоснование такой постановки второй основной задачи теории упругости в напряжениях можно найти в [1].

Ниже с помощью введенного В.Л. Рвачевым понятия квазифункций Грина [2, 4] дается вывод системы интегральных уравнений для решения сформулированной выше задачи. Эти уравнения в отличие от полученных в [3] имеют более простую структуру и бóльшие возможности для численной реализации.

Из формулы Грина и интегрального представления для функций $\sigma_{ij}(x)$ и $q(x, \xi)$ можно получить

$$\sigma_{ij}(x) = \sigma^*_{ij}(x) - \frac{1}{4\pi}\int_D \Delta\sigma_{ij}(\eta)\,F(x,\eta)\,d_\eta D,$$

где

$$q(x,\xi) = \left[r^2 + 4\omega(x)\,\omega(\xi)\right]^{-1/2};$$

$\omega(x)$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы S области D, причем $\omega(x) > 0$ в $D\backslash S$ [3];

$$\sigma^*_{ij}(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_S \sigma_{ij}(\xi)\,\frac{\partial}{\partial n_\xi}F(x,\xi)\,d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_D \sigma_{ij}(\eta)\,\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D;$$

$F(x, \xi) = 1/r - q(x, \xi)$ – квазифункция Грина.

Из уравнения (1) находим

$$\Delta\sigma_{ij} = -\frac{1}{1+\nu}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} - \Phi_{ij}(x),$$

где

$$\Phi_{ij}(x) = \frac{\nu}{1-\nu} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho_k(x) X_k(x)] \, \delta_{ij} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} [\rho_i(x) X_i(x)] + \frac{\partial}{\partial x_i} [\rho_j(x) X_j(x)] .$$

Тогда

$$\frac{1}{4\pi} \int_D \Delta\sigma_{ij}(\eta) F(x, \eta) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_D \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial\eta_i \partial\eta_j} F(x, \eta) \, d_\eta D +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_D \Phi_{ij}(\eta) F(x, \eta) \, d_\eta D \ , \tag{3}$$

где $\kappa = 1/(1+\nu)$.

Преобразуем первый интеграл в правой части (3)

$$\int_D \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial\eta_i \partial\eta_j} F(x, \eta) \, d_\eta D = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{r > \epsilon} \frac{\partial^2 S(\eta)}{\partial\eta_i \partial\eta_j} F(x, \eta) \, d_\eta D =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \Big[\int_{r > \epsilon} \frac{\partial}{\partial\eta_i} \Big[\frac{\partial S}{\partial\eta_j} F(x, \eta) \Big] d_\eta D - \int_{r > \epsilon} \frac{\partial S}{\partial\eta_j} \frac{\partial}{\partial\eta_i} F(x, \eta) \, d_\eta D \Big] =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \Big[\int_S \frac{\partial S}{\partial\xi_i} F(x, \xi) \cos(n, \xi_i) \, d_\xi S - \int_{r > \epsilon} \frac{\partial S}{\partial\eta_j} \frac{\partial}{\partial\eta_i} F(x, \eta) \, d_\eta D \Big] . \tag{4}$$

По определению функции $F(x, \xi)$ первый интеграл в правой части (4) равен нулю, а последний равномерно сходится к своему пределу, когда $\epsilon \to 0$ [4]. Поэтому в пределе при $\epsilon \to 0$ окончательно имеем:

$$\sigma_{ij}(x) = - \frac{\kappa}{4\pi} \int_D \frac{\partial S}{\partial\eta_j} (\eta) \frac{\partial}{\partial\eta_i} F(x, \eta) \, d_\eta D +$$

$$+ \sigma^*_{ij}(x) + \frac{1}{4\pi} \int_D \Phi_{ij}(\eta) F(x, \eta) \, d_\eta D . \tag{5}$$

Продифференцируем по x_j выражение (5), записанное для σ_{kk} $(k=1,2,3)$:

$$\frac{\partial S}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{3} \Big[\frac{\partial \sigma^*_{kk}(x)}{\partial x_j} - \frac{\kappa}{4\pi} \int_D \frac{\partial S(\eta)}{\partial\eta_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial\eta_k} F(x, \eta) \, d_\eta D +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_D \Phi_{kk}(\eta) \frac{\partial}{\partial x_j} F(x, \eta) \, d_\eta D . \tag{6}$$

Перенос операции дифференцирования под знак интеграла возможен согласно [5].

Подставляя (5), (6) в (2), получим замкнутую систему уравнений относительно неизвестных σ_{ij} и $\partial S/dx_j$.

Если ограничиться формулами (2) и (5), то на основе рассматриваемого метода можно получить систему интегродифференциальных уравнений для определения составляющих тензора напряжений в области D.

ЛИТЕРАТУРА

1. П о б е д р я Б.Е. Новая постановка задачи МДТТ в напряжениях // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 253, № 2. – С. 295–297. 2. Р в а ч е в В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев, 1982. – 551 с. 3. М а р т ы н е н к о М.Д., Ж у р а в к о в М.А., К н я з е в а Л.П. Интегральные уравнения пространственных задач теории упругости и их численно-аналитическая реализация // Вычислительные методы и математическое моделирование. – М., 1984. – 219 с. 4. Н и к о л ь с к и й С.М. Курс математического анализа. – М., 1973. – Т. 2. – 391 с. 5. П а р т о н В.З., П е р л и н П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М., 1977. – 311 с.

УДК 539.3

М.А. ЖУРАВКОВ, И.С. СОЛОДУХА (БГУ)

К РЕШЕНИЮ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Одной из разновидностей метода последовательных приближений решения упругопластических задач является метод дополнительных нагрузок. Уравнения равновесия, полученные в результате использования этого метода, имеют следующий вид [1]:

$$\mu\Delta u_m + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_m} + X_m + X_m^0 = 0, \tag{1}$$

где

$$X_m^0 = -\left\{\frac{\partial}{\partial x_m}\left[(2\mu + \frac{1}{\psi})\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_k} - \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j\neq m=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[(\mu - \frac{1}{2\psi})\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right)\right]\right\}; \tag{2}$$

$\psi = 3/2 \cdot \epsilon_i/\sigma_i$; ϵ_i, σ_i – интенсивность соответственно деформаций и напряжений; $m = \overline{1,n}$; $n = 2; 3$.

Присоединив к уравнениям (1) граничные условия на S в виде [1]

$$\lambda\theta n_m + \mu\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_m}{\partial x_k}n_k + \mu\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u_k}{\partial x_m}n_k = X_{\nu m} + X_{\nu m}^{(0)}, \tag{3}$$

где

$$X_{\nu m}^{(0)} = \sum_{j\neq m}(G - \frac{1}{2\psi})\left[\left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m}\right)n_j\right] +$$