

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г.А. О разложении функций в ряды вида $f(x) = \sum_k A_k F(a_k x)$ // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. — 1981. — Т. 33. — С. 22–43. 2. Крушевский А.Е., Чурakov В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1975. — Вып. 2. — С. 91–102. 3. Крушевский А.Е., Акимов В.А. К вопросу об определении коэффициентов неортогональных рядов на примере равновесия жестко заземленной плиты // Теоретическая и прикладная механика. — Минск, 1984. — Вып. 11. — С. 21–27. 4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1963. — 1100 с. 5. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. — М., 1976. — 536 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Н.Я. ЛУЦКО (БПИ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ИТЕРАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Частота и форма свободных колебаний являются важнейшими параметрами, характеризующими динамические свойства конструкции. Однако точное их определение даже в простейшем случае колебаний упругих стержней прямоугольного сечения весьма затруднительно.

В настоящей работе некоторые низшие частоты и формы собственных колебаний однородного цилиндрического стержня, жестко закрепленного на одном из торцов, при осесимметричной деформации определяются на основе вариационного принципа Лагранжа с применением приближенного метода обратной итерации.

Решение задачи в цилиндрических координатах строится в виде степенных рядов:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum \sum u_{2m+1, n+1} r^{2m+1} z^{n+1} \sin \omega t, \\ w &= \sum \sum w_{2m_1, n_1+1} r^{2m_1} z^{n_1+1} \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

так как в случае свободных колебаний перемещения, деформации и напряжения изменяются по гармоническому закону.

Основой используемого алгоритма служит свойство полной энергии системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V [T \cdot \cdot E + \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2] dV, \quad (2)$$

($T \cdot E$ — бискалярное произведение тензора напряжений на тензор деформаций, ρ — плотность материала, \bar{u} — вектор перемещений) принимать в состоянии устойчивого равновесия стержня минимальное значение.

Так как ряды (1) должны удовлетворять не только минимуму функционала (2), но и уравнениям внутренних и поверхностных связей $A\bar{u} = \bar{c}$, то от задачи на условный минимум функционала (2) переходим с помощью множителя Лагранжа $\bar{\lambda}$ к задаче на обычный минимум вспомогательного функционала:

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} \int \int \int [T \cdot \cdot E + \rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2] dV + \bar{\lambda} (A\bar{u} - \bar{c}). \quad (3)$$

Подставляя разложение (1) в формулу (3), приходим к задаче отыскания значений n неизвестных (обобщенных перемещений и множителей Лагранжа), при которых функционал Π_1 минимален. Для их нахождения возьмем частные производные от Π_1 по всем неизвестным и приравняем их нулю, что дает обобщенную задачу о собственных значениях, определяемую условием

$$(B - \omega^2 M)\bar{u} = 0, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{2} \int \int \int_V T \cdot \cdot E dV \right) (j = 1, n_3) & A^T \\ & 0 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{1}{2} \int \int \int_V \rho (\bar{u})^2 dV \right) (j = 1, n_3) & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$$

в случае, когда уравнения связей не содержат коэффициентов при ω^2 .

Значения параметра ω , при которых уравнение (4) имеет ненулевые решения, являются собственными значениями пары (B, M) (положительные корни имеют смысл частот собственных колебаний упругого тела), а соответствующие ненулевые решения $\bar{u}(r, z)$ — собственные векторы этой пары, совпадающие с формами собственных колебаний.

Обобщенную задачу отыскания собственных значений, определенную условием (4), рассматриваем в пространстве E^n со скалярным произведением $(x, y) = y^T M^{-1} x$ или $(x, y) = y^T M x$, где y^T — вектор-строка. Выбираем метод линейно сходящейся обратной итерации (INVIT) [1]. Для ускорения итерационного процесса после нескольких шагов INVIT (обычно после получения двух значащих цифр в ω_j^2) переходим к обратной итерации со сдвигом Релая (RQI) [1], имеющей кубическую скорость сходимости:

$$(B - \rho_k M)\bar{u}_{k+1} = M\bar{u}_k,$$

где

$$\rho_k = \frac{\bar{u}_k^T B \bar{u}_k}{\bar{u}_k^T M \bar{u}_k}.$$

С помощью указанных алгоритмов находим все необходимые собственные значения и векторы, выполняя условия ортогональности разыскиваемой формы собственных колебаний стержня к вычисленным ранее путем ортогонального исчерпывания. Таким образом, алгоритм для решения обобщенной задачи о собственных значениях имеет следующий вид.

1. Принимается начальное приближение собственного вектора $x_0^i = 1$, где i — номер разыскиваемого собственного значения.

2. Если $i = 1$, выполняется п. 3, в противном случае проводится исчерпывание

$$\bar{x}_k^i = \bar{x}_k^i - \sum_{r=1}^{i-1} \frac{[(\bar{x}_k^i)^T M \bar{u}_r] \bar{u}_r}{\bar{u}_r^T M \bar{u}_r}, \quad (5)$$

где \bar{u}_r — ранее вычисленные собственные векторы.

3. Осуществляется *INVT*:

а) решается уравнение $B \bar{y}_{k+1}^i = M \bar{x}_k^i$ относительно \bar{y}_{k+1}^i ;

б) производится нормирование

$$\bar{x}_{k+1}^i = \frac{\bar{y}_{k+1}^i}{\|\bar{y}_{k+1}^i\|_M} = \frac{\bar{y}_{k+1}^i}{\sqrt{(\bar{y}_{k+1}^i)^T M \bar{y}_{k+1}^i}}; \quad (6)$$

в) вычисляется

$$\rho_{k+1}^i = (\bar{x}_{k+1}^i)^T B \bar{x}_{k+1}^i; \quad (7)$$

г) если $|\rho_{k+1}^i - \rho_k^i| > \rho_{k+1}^i \cdot 10^{-2}$, итерационный процесс повторяется с п. 2, в противном случае выполняется п. 4.

4. Осуществляется *RQI*, где в качестве начального приближения используется результат п. 3:

а) если $i = 1$, выполняется п. 4б, в противном случае вначале производится исчерпывание по формуле (5);

б) решается уравнение $(B - \rho_k M) \bar{y}_{k+1}^i = M \bar{x}_k^i$ относительно \bar{y}_{k+1}^i ;

в) производится нормирование по формуле (6);

г) вычисляется по формуле (7) ρ_{k+1}^i ;

д) если $|\rho_{k+1}^i - \rho_k^i| > 10^{-2}$, итерационный процесс повторяется с п. 4а, в противном случае ρ_{k+1}^i и \bar{x}_{k+1}^i считаются определенными.

Для реализации предлагаемого алгоритма был составлен и отлажен пакет из 20 подпрограмм под общим названием *DINAM*. Максимальная продолжительность расчета одного варианта — примерно 5 мин.

Тестовая задача — расчет стержня при следующих исходных данных: $r_2 = 0,5$ м, $l = 10$ м, $\lambda = 10,1132 \cdot 10^{10}$ Па, $G = 7,9461 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 7860$ кг/м³. Результаты расчета: значения первой (ω_1), второй (ω_2) и третьей (ω_3) частот и соответствующих им форм собственных колебаний, а также значения напряжений и перемещений в различных точках стержня. Решения находились методом последовательных приближений степенными рядами (1) с многочленами от третьей до восьмой степени. В качестве наилучшей аппроксимации выбирался многочлен степени *NM*, дающий наименьшую среднеквадратическую ошибку выполнения уравнений Ламе (σ_1) и условий на поверхности тела (σ_2).

Для апробации алгоритма и пакета программ были рассчитаны три первые собственные частоты и соответствующие им формы свободных колебаний для

двух вариантов:

- 1) уравнения связей не использовались. При $NM = 5$ $\omega_1 = 806,37$ рад/с, $\omega_2 = 2416,65$ рад/с, $\omega_3 = 3916,61$ рад/с, $\sigma_1 = 0,136 \cdot 10^{-3}$ Па, $\sigma_2 = 0,31 \cdot 10^{-4}$ Па;
 - 2) уравнения внутренних связей использовались в статической форме [2].
- В этом случае при $NM = 6$ $\omega_1 = 815$ рад/с, $\omega_2 = 2698$ рад/с, $\omega_3 = 5698,78$ рад/с, $\sigma_1 = 0,83 \cdot 10^{-5}$ Па; $\sigma_2 = 0,55 \cdot 10^{-4}$ Па.

Полученные значения ω_1 , ω_2 и ω_3 превышают вычисленные по технической теории ($\omega_1^* = 799,1$ рад/с, $\omega_2^* = 2397,31$ рад/с, $\omega_3^* = 3995,52$ рад/с). Это объясняется тем, что нами была принята жесткая заделка стержня и в радиальном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. – М., 1983. – 382 с.
2. Крушевский А.Е., Луцко Н.Я. Построение алгоритма и пакета программ на ЭВМ для решения осесимметричных статических задач теории упругости // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1986. – Вып. 13. – 35–41.

УДК 539.3

Н.Я. ЛУЦКО (БПИ)

АНАЛИЗ СПОСОБОВ ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СВЯЗЕЙ В МОДИФИЦИРОВАННОМ ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ТРЕФТЦА

Оптимизация конструкций формообразующих элементов требует определения их напряженного состояния при действии статической нагрузки. Расчет матрицы для прессования порошков приведен в работе [1]. Однако решение получилось тривиальным вследствие равенства нулю всех обобщенных перемещений, за исключением одного, характеризующего осевое линейное перемещение. Поэтому это решение требует усовершенствования.

Ниже приводится не только расчет напряженного состояния матрицы для прессования порошка при действии нормальной неравномерной нагрузки методом 1 [2] и модифицированным методом 2, но и исследование скорости сходимости решений, полученных обоими методами, а также степени близости приближенных решений к точному.

Коренное отличие метода 2 от метода 1 заключается в привлечении для нахождения приближенного решения осесимметричной статической задачи теории упругости в цилиндрических координатах неопределенных множителей Лагранжа. При этом задача на условный экстремум функционала $\Pi(\bar{b})$ [2] заменяется задачей на отыскание экстремума вспомогательного функционала

$$\Pi_1(\bar{b}, \bar{\lambda}) = \Pi(\bar{b}) + \bar{\lambda}(A\bar{b} - \bar{c}), \quad (1)$$

где $A\bar{b} = \bar{c}$ – СЛАУ внутренних и поверхностных связей.

Стационарные точки функционала (1) удовлетворяют СЛАУ: