Отметим сравнительную простоту использования указанной теоремы в практических исследованиях. В частности, с ее помощью могут быть несложно получены результаты работы [4], а также доказана сходимость неконформных схем метода конечных элементов [3] Крузея–Равьяра, Фрайш де Вебеке и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М., 1977. – 383 с. 2. Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., 1978. – 336 с. 3. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М., 1980. – 512 с. 4. Литвинов В.Г. Об одной модификации метода Ритца для вариационных уравнений и ее приложение к краевым задачам со смешанными граничными условиями // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 3. – С. 519–526.

УДК 539.11

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
В.А. АКИМОВ (БПИ)

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Решение широкого класса краевых задач теории упругости для конечных областей может быть представлено в виде рядов, содержащих функции, зависящие от корней трансцендентных уравнений. К этому же классу относятся задачи, структура решения которых позволяет выполнить граничные условия на части поверхности за счет нахождения корней характеристического уравнения. Частным случаем являются однородные решения, применяемые для более точного выполнения граничных условий и позволяющие дать оценку приближенного решения математической модели, положенной в основу расчета.

Во многих работах используется метод разложения вещественных функций в неортогональные ряды с последующим определением их коэффициентов посредством решения соответствующих бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. В связи с этим возникает вопрос о построении таких решений в случае, когда можно найти коэффициенты разложений по готовым формулам, т. е. получить "замкнутое" решение задачи.

Обычно при аналитическом разложении заданной функции в ряд по неортогональным функциям используется теорема о вычетах соответствующего контурного интеграла [1], но в работах [2, 3] это сделано операторным методом. Сравним эти два способа с математической точки зрения.

Первоначально выясним вопрос о разложении функции x^{2r} и x^{2r+1} ($r = 0, 1, 2 \ldots$) в ряды по $\operatorname{sh} a_k x$ и $\operatorname{ch} a_k x$, т. е. определим коэффициенты в рядах вида

$$x^{2r+1} = \sum_{k=1}^{\infty} A_{k,2r+1} \operatorname{sh} a_k x , \tag{1}$$

$$x^{2r} = B_{0,2r} + \sum_{k=1}^{\infty} B_{k,2r} \operatorname{ch} a_k x, \tag{2}$$

где a_k – корни трансцендентного уравнения $\operatorname{sh}\mu - \mu = 0, r = 0, 1, 2 \ldots$

Приняв $F(z) = \exp(z)$, $\varphi(\mu) = 6(\operatorname{sh}\mu - \mu)^2\mu$ и обобщая формулы, приведенные в работе [1], на случай комплексных корней, после элементарных преобразований получим:

$$x^{2r+1} = -2/\alpha_{2r+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k \lambda_k^{(r)} \operatorname{sh} a_k x / (\operatorname{ch} a_k - 1) -$$
$$- 2/\alpha_{2r+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k \lambda_k^{(r)} \operatorname{sh}(a_k x) / (\operatorname{ch} a_k - 1)}, \tag{3}$$

$$x^{2r} = 6u_{2r+1}/\alpha_{2r} - 2/\alpha_{2r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{(r-1)} \operatorname{ch} a_k x / (\operatorname{ch} a_k - 1) -$$
$$- 2/\alpha_{2r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda_k^{(r-1)} \operatorname{ch} a_k x / (\operatorname{ch} a_k - 1)}. \tag{4}$$

Здесь черта сверху означает комплексное сопряжение; $\lambda_k^{(r)} = \sum_{s=0}^{s=r} u_{2(r-s)+1}/a_k^{2s}$, α_{2r}, α_{2r+1} и u_{2r}, u_{2r+1} – коэффициенты разложения функций $F(z)$ и $\varphi(\mu)/\mu^2$ в степенные ряды $F(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s z^s$, $\alpha_s = 1/s!$, $(\operatorname{sh}\mu - \mu)/\mu^2 = \sum_{s=0}^{\infty} u_{2s+1}\mu^{2s+1}$, $u_{2s+1} = 1/(2s+3)!$

При нахождении коэффициентов разложений операторным методом для уравнения (1) используется оператор $D_1 = (\operatorname{sh} d_x - d_x)/[d_x^2(d_x^2 - a_k^2)]$ (где $d_x = d/d_x$), для уравнения (2) – операторы $D_0 = (\operatorname{sh} d_x - d_x)/d_x^3$ и $D_2 = (\operatorname{sh} d_x - d_x)/[d_x(d_x^2 - a_k^2)]$. В результате получаем следующие разрешающие соотношения (при $x = 0$) для определения коэффициентов $A_{k,2r+1}$; $B_{0,2r}$; $B_{k,2r}$:

$$\left\{(\operatorname{sh} d_x - d_x)/[d_x^2(d_x^2 - a_k^2)]\, x^{2r+1}\right\}_{x=0} = [A_{k,2r+1}(\operatorname{ch} a_k - 1)\operatorname{ch} a_k \times$$
$$\times x/(2a_k^3)]_{x=0}, \quad [(\operatorname{sh} d_x - d_x)/d_x^3 \cdot x^{2r}]_{x=0} = B_{0,2r}/6,$$

$$\left\{(\operatorname{sh} d_x - d_x)/[d_x^2(d_x^2 + a_k^2)]\, x^{2r}\right\}_{x=0} = [B_{k,2r}(\operatorname{ch} a_k -$$
$$- 1)\operatorname{ch} a_k x)/(2a_k^2)]_{x=0}.$$

С учетом того что

$$\left\{(\operatorname{sh} d_x - d_x)/\left[d_x^2(d_x^2 - a_k^2)\right] x^{2r+1}\right\}_{x=0} = -1/a_k^2 \cdot \left\{\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}(\operatorname{sh}\mu - \right.$$

$$\left. -\mu)/\left[\mu^2(1-\mu^2/a_k^2)\right]\right\}_{\mu=0},$$

$$\left[(\operatorname{sh} d_x - d_x)/d_x^3 \cdot x^{2r}\right]_{x=0} = \left[\frac{d^{2r}}{d\mu^{2r}}\varphi(\mu)/\mu\right]_{\mu=0} = 6u_{2r+1}/\alpha_{2r},$$

$$\left\{(\operatorname{sh} d_x - d_x)/\left[d_x(d_x^2 - a_k^2)\right] x^{2r}\right\}_{x=0} = -1/a_k^2 \cdot \left\{\frac{d^{2r}}{d\mu^{2r}}(\operatorname{sh}\mu - \mu)/\left[\mu(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -\mu^2/a_k^2)\right]\right\}_{\mu=0},$$

$$\left\{\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}(\operatorname{sh}\mu - \mu)/\left[\mu^2(1-\mu^2/a_k^2)\right]\right\}_{\mu=0} = \lambda_k^{(r)}/\alpha_{2r+1},$$

получим:

$$A_{k,2r+1} = -2a_k\lambda_k^{(r)}/\left[\alpha_{2r+1}(\operatorname{ch} a_k - 1)\right],$$

$$B_{0,2r} = 6u_{2r+1}/\alpha_{2r}, \quad B_{k,2r} = -2\lambda_k^{(r-1)}/\left[\alpha_{2r}(\operatorname{ch} a_k - 1)\right].$$

Подставляя в ряды (1) и (2) полученные коэффициенты, приходим к формулам (3) и (4), на основании чего делаем вывод об идентичности рассматриваемых способов разложения.

В качестве примера разложим функцию $\exp[\exp(x)]$ в ряд вида

$$\exp[\exp(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \operatorname{sh} kx + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \operatorname{ch} kx + B_0.$$

Используя для этой цели операторы

$$D_1 = \sin\pi d_x/(k^2 - d_x^2), \quad D_0 = \sin\pi d_x, \quad D_a = d_x \sin\pi d_x/(k^2 - d_x^2),$$

по аналогии с вышеизложенным получим разрешающие уравнения для искомых коэффициентов этого разложения:

$$\left[(-1)^k\pi\exp(kx)/(2k!k)\right]_{x=0} = \left[B_k(-1)^k\pi\operatorname{ch} kx/(2k)\right]_{x=0},$$

$$\left[(-1)^k\pi\exp(kx)/(2k!k)\right]_{x=0} = \left[A_k(-1)^k\pi\operatorname{ch} kx/(2k)\right]_{x=0},$$

$$\pi = B_0\pi.$$

Отсюда получаем $B_0 = 1$, $A_k = B_k = 1/k!$, а исходное разложение принимает вид

$$\exp(\exp(x)) = \sum_{k=1}^{\infty}(\operatorname{sh} kx + \operatorname{ch} kx)/k!. \quad (5)$$

Достоверность формулы (5) легко установить посредством разложения в ряд Маклорена:

$$\exp(\exp(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(kx)/k! = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{sh}kx + \mathrm{ch}kx)/k!\,.$$

Если в формуле (5) выделить четную и нечетную части, то

$$\left.\begin{aligned} \exp(\mathrm{ch}x)\mathrm{sh}(\mathrm{sh}x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{sh}kx/k!\,, \\ \exp(\mathrm{ch}x)\mathrm{ch}(\mathrm{sh}x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{ch}\,kx/k\,!. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Разложение (6) можно найти по справочнику [4].

С помощью оператора $D = (\mathrm{sh}d_x - d_x)/[d_x^3(d_x - a_k)]$ можно найти коэффициенты и в случае разложения функции $\exp(\lambda x)$ в ряд Дирихле

$$\exp(\lambda x) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \exp(a_k x),$$

где a_k – корни уравнения $\mathrm{sh}\mu - \mu = 0$.

В этом случае разрешающее уравнение принимает вид

$$\left\{(\mathrm{ch}\lambda - \lambda)\exp(\lambda x)/[\lambda^3(\lambda - a_k)]\right\}_{x=0} = [C_k(\mathrm{ch}a_k - 1)\exp(a_k x)/a_k^3]_{x=0},$$

откуда следует, что $C_k = (\mathrm{sh}\lambda - \lambda)\,a_k^3/[\lambda^3(\lambda - a_k)(\mathrm{ch}a_k - 1)]$. Если положить $L(\lambda) = (\mathrm{sh}\lambda - \lambda)/\lambda^3$, получим известное выражение [5]

$$\exp(\lambda x) = \sum_{k=1}^{\infty} L(\lambda)\exp(a_k x)/[(\lambda - a_k)L'(a_k)]\,,$$

являющееся интерполяционной формулой Лагранжа.

Полагая $a_k = k$ и заменяя в рядах (1) и (2) гиперболические функции тригонометрическими, придем к рядам Фурье. В этом случае коэффициенты, получаемые операторным методом, совпадают с найденными общеизвестными способами теории рядов Фурье для всех разлагаемых функций.

На основе полученных результатов можно сделать заключение, что операторный метод достаточно универсален и позволяет находить коэффициенты разложений функций как в неортогональные, так и ортогональные ряды. В отличие от метода контурного интеграла нет необходимости выбора такой формы контура интегрирования, чтобы подынтегральная функция была однозначной и стремилась к нулю при неограниченном увеличении его размеров. Кроме того, искомые коэффициенты представляются не в виде ряда, а в виде конечной формулы. Недостатком операторного метода является трудность однозначного выбора дифференциального оператора для заданного класса неортогональных функций. Но в некоторых случаях его преимущества могут дать значительное упрощение решения поставленной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г.А. О разложении функций в ряды вида $f(x) = \sum_{(k)} A_k F(a_k x)$ // Изв. Ленингр. политехн. ин-та. – 1981. – Т. 33. – С. 22–43. 2. Крушевский А.Е., Чураков В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1975. – Вып. 2. – С. 91–102. 3. Крушевский А.Е., Акимов В.А. К вопросу об определении коэффициентов неортогональных рядов на примере равновесия жестко защемленной плиты // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1984. – Вып. 11. – С. 21–27. 4. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М., 1963. – 1100 с. 5. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент. – М., 1976. – 536 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, канд. техн. наук,
Н.Я. ЛУЦКО (БПИ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ИТЕРАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Частота и форма свободных колебаний являются важнейшими параметрами, характеризующими динамические свойства конструкции. Однако точное их определение даже в простейшем случае колебаний упругих стержней прямоугольного сечения весьма затруднительно.

В настоящей работе некоторые низшие частоты и формы собственных колебаний однородного цилиндрического стержня, жестко закрепленного на одном из торцов, при осесимметричной деформации определяются на основе вариационного принципа Лагранжа с применением приближенного метода обратной итерации.

Решение задачи в цилиндрических координатах строится в виде степенных рядов:

$$\left.\begin{aligned} u &= \Sigma\Sigma u_{2m+1,n+1}\, r^{2m+1} z^{n+1} \sin\omega t\,, \\ w &= \Sigma\Sigma w_{2m_1,n_1+1}\, r^{2m_1} z^{n_1+1} \sin\omega t\,, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

так как в случае свободных колебаний перемещения, деформации и напряжения изменяются по гармоническому закону.

Основой используемого алгоритма служит свойство полной энергии системы

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \left[T\cdot\cdot E + \rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}\right)^2\right] dV\,, \qquad (2)$$

($T\cdot\cdot E$ – бискалярное произведение тензора напряжений на тензор деформаций, ρ – плотность материала, $\bar{u}$ – вектор перемещений) принимать в состоянии устойчивого равновесия стержня минимальное значение.