

ОБЩАЯ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.3

М.А. ЛЕВИН, канд. техн. наук (БПИ)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ ТЕОРИИ КАЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЬНОГО ПОДХОДА И БАЗОВЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

В динамике механических систем с качением определяющую роль играют силы взаимодействия системы с опорной поверхностью, представляющие собою реакции поверхности в зоне контакта с деформируемыми колесами (опорами качения) и образующие вместе с силами тяжести и аэродинамическими сопротивлениями совокупность внешних сил, действующих на систему. Управление движением таких систем осуществляется за счет изменения направления и величины реакций посредством регулирования некоторых угловых координат дисков колес. Таким образом, в механике систем с качением оказывается важным установить, как связаны реакции в области контакта катящегося деформируемого колеса с фазовыми координатами его жесткого диска. Ответ на этот вопрос дает теория качения, которая устанавливает необходимые зависимости, обычно записываемые в форме уравнений.

В указанные уравнения входит большое число констант, экспериментальное и аналитическое определение которых оказывается весьма сложной проблемой, имеющей большое теоретическое и прикладное значение. Если значения этих констант неизвестны, уравнения теории качения использовать нельзя.

Опытное определение констант уравнений теории качения требует разработки сложных методик, создания разнообразных стендов и специальных установок для дорожных испытаний. К сожалению, из-за трудностей практического выполнения подобной программы испытаний не удается систематически реализовывать экспериментальное определение констант, составляющих основу даже существенно менее обширного набора данных по каждому деформируемому колесу (колесу с шиной при заданной нагрузке и давлении). Поэтому актуальным становится определение их аналитическими методами с использованием минимального набора базовых экспериментальных данных, основывающимися на модельном подходе к описанию процесса качения деформируемого колеса.

Модельный подход базируется на представлении периферии колеса (шины) в виде двухсекционной круговой нити (секции удалены друг от друга на расстояние $2b$) с натяжением N_2^0 и жесткостью на растяжение N_1^0 . Указанная нить опирается на деформируемое основание с жесткостями на единицу длины

периферии в тангенциальном направлении c_1^0 , боковом — c_2^0 и радиальном — c_3^0 . Параметрами модели являются также радиус колеса R и длина области контакта $2a$ или контактный угол [1]. Использование модельного подхода позволяет уменьшить число дорогостоящих опытов, необходимых для определения констант теории качения. В частности, в работе [1] предложен способ определения 22 констант через указанные выше 8 параметров модели в случае малых составляющих реакций основания. При этом аналитические методы дают приближенные значения констант, но, как показывает практика, и опытные данные часто определяются со значительными погрешностями.

Когда составляющие реакции в области контакта колеса с основанием не малы, возрастает число параметров, необходимых для описания качения колеса. Поэтому необходимо проанализировать, какие базовые константы (в том числе и опытные) должны определяться в первую очередь, и указать процедуру аналитического нахождения других констант.

Константы уравнений теории качения часто называют параметрами деформируемого колеса, а в инженерной практике — параметрами колеса с пневматической шиной. В случае реализации на ЭВМ аналитических методов определения недостающих параметров, экспериментальные значения которых неизвестны, последние можно назвать выходными параметрами, а те опытные параметры, которые вводятся в качестве исходных данных для соответствующих программ, — входными. В зависимости от алгоритма один и тот же параметр в одних случаях будет входным, а в других — выходным.

Назовем совокупность базовых констант уравнений теории качения (параметров шины), которые имеет смысл определять по известным методикам для каждой конкретной шины при заданном давлении и нагрузке, с указанием единиц и точности измерений.

1. Продольная жесткость шины — c_x (кН/м).
2. Коэффициент сопротивления продольному псевдоскольжению — k_x (кН).
Продольное псевдоскольжение определяется по формуле

$$\dot{\epsilon}_1 = r_k / r_{k0} - 1,$$

где r_k — радиус качения колеса; r_{k0} — радиус качения в свободном режиме.

Вместо k_x может быть определен коэффициент тангенциальной эластичности шины λ (м/кН), который обычно получают в результате стендовых испытаний ($k_x = r_{k0} / \lambda$).

Большой интерес представляет нахождение зависимости продольной силы P_1 от радиуса качения колеса (рис. 1) и скорости движения. Пользуясь указанной зависимостью, можно определить

$$k_x / r_{k0} = 1 / \lambda = |dP_1 / dr_k|_{P_1=0} = \operatorname{tg} \gamma_1.$$

3. Боковая жесткость шины — c_y (кН/м).
4. Коэффициент сопротивления боковому псевдоскольжению (уводу) — k_y (кН/рад).

Под боковым псевдоскольжением здесь понимается угол увода ϵ_2 (рад). Из зависимости боковой силы P_2 от угла увода и скорости движения (рис. 2) легко определяется

$$k_y = |dP_2/d\epsilon_2|_{P_2=0} = \operatorname{tg}\gamma_2.$$

5. Нормальная нагрузка на колесо – G (кН).
6. Длина области контакта шины с основанием – $2a$ (м).
7. Угловая жесткость шины – c_θ (кН·м/рад).
8. Свободный радиус колеса с шиной – R (м):

$$R = L / (2\pi),$$

где L – длина экваториальной окружности свободной шины при заданном давлении.

9. Момент сопротивления качению в свободном режиме движения при $P_1 = 0$, зависящий от скорости движения, – $M_{f0}(v)$ (кН·м).

Вместо $M_{f0}(v)$ можно определить силу сопротивления движению в ведомом режиме – $P_f(v)$ (кН), поскольку имеет место приближенное равенство

$$M_{f0} \approx P_f r_{к0} \approx P_f r_{квдм} \approx P_f R,$$

где $r_{квдм}$ – радиус качения колеса в ведомом режиме.

10. Нормальная жесткость шины при заданной номинальной нагрузке G_H – c_z (кН/м).

Если установлена зависимость $G(h)$ (рис. 3), где h – нормальная деформация шины, $c_z = dG/dh|_{G=G_H}$.

11. Коэффициент сопротивления уводу колеса по стабилизирующему моменту – c_v (кН·м/рад), определяемый из экспериментальной зависимости $M_{стаб}(\epsilon_2, v)$ (рис. 4), $c_v = |dM_{стаб}/d\epsilon_2|_{\epsilon_2=0} = \operatorname{tg}\gamma_3$.

12. Радиус качения колеса с шиной в свободном режиме в зависимости от скорости движения – $r_{к0}(v)$ (м).

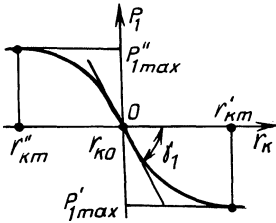


Рис. 1. Зависимость P_1 от $r_{к}$

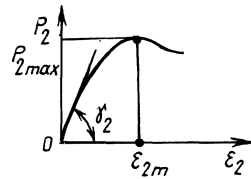


Рис. 2. Зависимость P_2 от ϵ_2

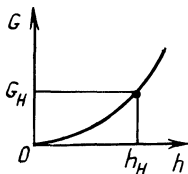


Рис. 3. Зависимость G от h

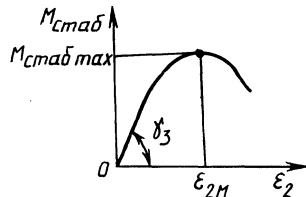


Рис. 4. Зависимость $M_{стаб}$ от ϵ_2

13. Статический радиус — $r_{ст}$ (м).

14. Динамический радиус, зависящий от скорости движения, — $r_{д}(v)$ (м).

15. Радиус качения в ведомом режиме, зависящий от скорости движения, — $r_{к\text{ в д м}}(v)$ (м).

16. Ширина области контакта шины с основанием — $2b$ (м).

17. Масса шины — m (кг).

18. Момент инерции шины относительно оси вращения колеса — I_1 (Мг·м²).

19. Момент инерции шины относительно оси, перпендикулярной оси вращения и проходящей через центр тяжести колеса с шиной, — I_2 (Мг·м²). Отметим, что, строго говоря, необходимо определить положение центра тяжести и все шесть компонент тензора инерции.

Коэффициенты:

$$20. \beta_{\dot{x}} = -dP_1/d\dot{x} |_{P_1=0} \quad (\text{кН} \cdot \text{с}/\text{м}).$$

$$21. \beta_{\dot{y}} = -dP_2/d\dot{y} |_{P_2=0} \quad (\text{кН} \cdot \text{с}/\text{м}).$$

$$22. \beta_{\dot{z}} = -dG/d\dot{z} |_{G=G_H} \quad (\text{кН} \cdot \text{с}/\text{м}).$$

$$23. \beta_{\dot{\theta}} = -dM_{\text{стаб}}/d\dot{\theta} |_{M_{\text{стаб}}=0} \quad (\text{кН} \cdot \text{м} \cdot \text{с}/\text{рад}).$$

24. Максимальные продольные силы в тормозном и тяговом режимах (см. рис. 1) — $P'_{1\text{max}}, P''_{1\text{max}}$ (кН).

25. Радиусы качения, соответствующие $P'_{1\text{max}}, P''_{1\text{max}}, r'_{км}, r''_{км}$ (м).

26. Максимальная боковая сила (см. рис. 2) — $P_{2\text{max}}$ (кН).

27. Угол увода, соответствующий $P_{2\text{max}}$, — ϵ_{2m} (рад).

28. Максимальный стабилизирующий момент (см. рис. 4) — $M_{\text{стаб max}}$ (кН·м)

29. Угол увода, соответствующий $M_{\text{стаб max}}$, — ϵ_{2M} (рад).

Параметры 17...19 характеризуют инерционные свойства шины, параметры 20...23 — демпфирующие свойства невращающегося колеса, когда демпфирование прямо пропорционально скорости деформации шины.

При рассмотрении вопросов динамики систем с качением в условиях действия больших сил на конкретном сухом (влажном) покрытии при заданных скоростях движения ($v = 1; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40$ м/с) должны быть получены зависимости продольной силы P_1 от радиуса качения колеса и скорости движения, боковой силы P_2 от угла увода колеса и скорости, более общие зависимости продольной и боковой сил и износа шины на единицу пройденного пути от радиуса качения колеса, угла увода и скорости движения, а также аналогичная зависимость для стабилизирующего момента. Прежде всего следует найти зависимости, представленные на рис. 1...4, и определить параметры 24...29.

В уравнения теории качения при малых продольной и боковой составляющих реакции основания входит большое число и других констант, которые определяются с помощью программы, описанной в работах [2, 4]. При этом в

качестве входных данных такой программы используются параметры 1...8. В этом случае часть приведенных выше параметров, например $r_{к0}$, $r_{ст}$, c_z и др., являются контрольными, т. е. находятся с использованием упомянутой программы.

Отметим, что одним из входных параметров может быть длина области контакта $2a$, а выходным — нормальная жесткость шины c_z . Очевидно, что можно разработать такой алгоритм, где входным параметром будет c_z , а выходным — приведенная длина области контакта $2a$ вместе с уже определенной приведенной ее шириной $2b$. При этом может быть повышена точность расчета параметров колеса.

Опишем этот алгоритм, опираясь в отличие от работ [2, 4] на относительно простые зависимости, вытекающие из более простой математической обработки модели деформируемого колеса. На основании работы [3] можно получить следующие зависимости между параметрами модели $c_1^0, c_2^0, c_3^0, N_1^0, N_2^0, R, 2a, 2b$ и реального колеса с шиной $c_x, k_x, c_y, k_y, G, c_\theta, R, c_z$:

$$c_x = 2c_1^0(a + h_1), \quad k_x = 2c_1^0(a + h_1)^2; \quad (1)$$

$$c_y = 2c_2^0(a + h_2), \quad k_y = 2c_2^0(a + h_2)^2; \quad (2)$$

$$G = 2c_3^0/(3R) \cdot [(a + h_3)^3 - h_3^3]; \quad c_3^0 = c_2^0 h_2^2/h_3^2; \quad (3)$$

$$c_z = 2c_3^0(a + h_3); \quad (4)$$

$$c_\theta = c_x b^2 + 2/3 c_2^0 [(a + h_2)^3 - h_2^3]; \quad (5)$$

$$r_{ст} = R(\cos \alpha_0 - ah_3/R^2), \quad r_{ст} = a \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (6)$$

Таким образом, если заданы длина области контакта $2a$, а также $c_x, c_y, k_x, k_y, G, c_\theta, R$, то из выражений (1), (2), (3), (5) находим:

$$h_1 = k_x/c_x - a, \quad c_1^0 = c_x^2/(2k_x), \quad N_1^0 = c_1^0 h_1^2; \quad (7)$$

$$h_2 = k_y/c_y - a, \quad c_2^0 = c_y^2/(2k_y), \quad N_2^0 = c_2^0 h_2^2; \quad (8)$$

$$h_3 = 2a [\sqrt{6RG/(c_2^0 h_2^2 a)} - 3]^{-1}, \quad c_3^0 = c_2^0 h_2^2/h_3^2; \quad (9)$$

$$b = \sqrt{\{c_\theta - 2/3 \cdot c_2^0 [(a + h_2)^3 - h_2^3]\}/c_x}. \quad (10)$$

Если вместо опытного значения $2a$ в качестве входного параметра используется экспериментальное значение нормальной жесткости шины c_z , то уравнения (4), (7) ... (10) позволяют найти (например, методом половинного деления) значения всех параметров модели колеса $c_1^0, c_2^0, c_3^0, N_1^0, N_2^0, 2a, 2b$. Программа вычислений при этом оказывается настолько простой, что позволяет использовать микрокалькулятор БЗ-34. Ниже приводится описание алгоритма расчета. В соответствии с формулами (3) или (9) функция

$$W = G - 2c_3^0/(3R) [(a + h_3)^3 - h_3^3] \quad (11)$$

на границах интервала изменения a принимает значения $W > 0$ при $a_{\min} = 0$ и

$W \leq 0$ при $a_{\max} = k_y/c_y$. Для среднего значения $a = a_i$ по формулам (8) находим h_2, c_2^0, N_2^0 и затем из равенства (4) и второй формулы (9)

$$h_3 = [1 + \sqrt{1 + 2ac_z/(c_2^0 h_2^2)}] c_2^0 h_2^2 / c_z.$$

Значение h_3 подставляется в выражение (11), а в зависимости от знака W значение a_i помещается на соответствующую границу интервала. Счет продолжается до тех пор, пока $|a_{i+1} - a_i|$ не окажется меньше заданной величины, например 0,001 м. Определяется величина $2a$, а по формулам (7)...(10) — и все остальные параметры модели колеса. В частности, из равенств (6) находят a_0 и $r_{\text{ст}}$ (если $a \ll R$, то $a_0 \approx a/R$), а радиус качения колеса в свободном режиме движения определяется по формуле

$$r_{\text{к0}} = R [1 - a_0^2 (a/6 + h_1/2) / (a + h_1)]. \quad (12)$$

Константы уравнений теории качения в обозначениях работы [1] с использованием результатов [3] можно приближенно найти из соотношений:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= Rc_1^0, \quad k_2 = c_1^0 h_1, \quad k_3 = c_x, \quad k_4 = Rc_2^0, \quad k_5 = c_2^0 h_2, \\ k_6 &= c_y, \quad k_7 = k_{11} = k_{14} = G, \quad k_8 = c_z, \quad k_{10} = k_{12} = G/(2a_0), \\ k_{15} &= c_2^0 h_2 (a + h_2), \quad k_{16} = 2/3 \cdot c_2^0 [(a + h_2)^3 - h_2^3] + \\ &+ 2/3 a^3 N_1^0 / R^2, \\ k_{17} &= h_1 / R, \quad k_{18} = \frac{(a + h_1)^3 - h_1^3}{3R(a + h_1)(a + h_3)}, \\ k_{19} &= h_2 / R, \quad k_{20} = a + h_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Константы уравнений различных теорий качения выражаются через указанные в соотношениях (12), (13). В частности, кинематические коэффициенты в теории [2], обобщающей теорию М.В.Келдыша, находятся приближенно из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= s_2 c_x / k_x, \quad s_2 = \gamma_{10} c_x / k_x, \quad s_4 = s_5 c_y / k_y, \\ s_5 &= \gamma_{20} c_y / k_y, \quad \gamma_{10} = 3 / [1 - h_1^3 / (a + h_1)^3], \\ \gamma_{20} &= 3 / [1 - h_2^3 / (a + h_2)^3]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

В качестве примера приведем результаты расчета параметров модели колеса с шиной в соответствие с описанной приближенной процедурой при следующих входных данных¹: $c_x = 325$ кН/м, $k_x = 40$ кН, $c_y = 147$ кН/м, $k_y = 28,7$ кН/рад, $G = 5,5$ кН, $c_\theta = 2,85$ кН·м/рад, $R = 0,485$ м, $c_z = 363,8$ кН/м, $c_1^0 = 1320$ кН/м², $c_2^0 = 376$ кН/м², $c_3^0 = 1200$ кН/м², $N_1^0 = 0,923$ кН, $N_2^0 = 3,66$ кН, $2a = 0,193$ м, $2b = 0,123$ м. На основе этих данных можно вычислить $r_{\text{ст}} = 0,463$ м, $r_{\text{к0}} = 0,480$ м и другие константы по формулам вида (12)...(14).

¹Данные получены канд. техн. наук В.П. Бойковым.

Алгоритм более совершенной, но и более сложной процедуры определения констант теории качения описан, как указывалось, в работах [2, 4] и реализован в виде программы для ЭВМ.

Рассмотрим зависимость констант уравнений теории качения от угловой скорости вращения колеса $\omega = v/r_k$. Из опыта известно, что с увеличением ω уменьшается длина области контакта с основанием, возрастают его динамический радиус, нормальная жесткость и изменяются значения других констант. Эти эффекты легко прослеживаются на основе модельного подхода. Если обозначить массу нити, моделирующей периферию колеса, приходящуюся на единицу длины периферии, m_0 , то из известного уравнения равновесия вращающейся нити получим

$$N_2^0 = R(c_3^0 \lambda_3^* + m_0 \omega^2 R), \quad (15)$$

что при $\omega = 0$ дает

$$N_{2s}^0 = R c_3^0 \lambda_{3s}^* . \quad (16)$$

С другой стороны, в силу изменения длины нити ее натяжение определяется из выражения

$$N_2^0 = N_{2s}^0 + N_1^0 (\lambda_{3s}^* - \lambda_3^*) / R . \quad (17)$$

Выразив λ_3^* и λ_{3s}^* из равенств (15) и (16), окончательно найдем

$$N_2^0 = N_{2s}^0 + \xi_k m_0 R^2 \omega^2 = N_{2s}^0 + \mu_k \omega^2 , \quad (18)$$

где

$$\mu_k = \xi_k m_0 R^2 = m_0 R^2 / (1 + c_3^0 R^2 / N_1^0) .$$

Таким образом, при определении констант уравнений теории качения следует использовать значение не N_{2s}^0 , а N_2^0 , устанавливаемое для конкретной скорости вращения колеса ω . Поскольку не всегда известно, как определить m_0 для каждой конкретной шины, имеет смысл находить коэффициенты μ_k и N_{2s}^0 из опыта. Один из возможных методов определения μ_k и N_{2s}^0 заключается в следующем. Сначала проводятся испытания при очень малых скоростях движения ($\omega \ll 1$) и устанавливаются значения величин $c_1^0, c_2^0, c_3^0, N_1^0, N_{2s}^0, 2a, 2b$. Затем по замеренному приращению радиуса $\lambda_{3s}^* - \lambda_3^*$ шины, вращающейся с заданной угловой скоростью ω , по формулам (17) и (18) находится

$$\mu_k = (\lambda_{3s}^* - \lambda_3^*) N_1^0 / (R \omega^2) .$$

В заключение отметим, что устанавливаемые в статических испытаниях опытные значения c_x, c_y, c_θ при подстановке в качестве исходных данных в программу определения констант уравнений теории качения целесообразно уменьшать в среднем на 20% в связи с влиянием трения скольжения в области контакта катящегося колеса с основанием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М.А. Понижение порядка зависимостей для реакций катящегося деформируемого колеса // Докл. АН БССР. - 1974. - Т. 18, № 6. - С. 516-519. 2. Левин М.А.

Развитие и приложение теории качения к динамике систем с деформируемым колесом // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1982. – Вып. 9. – С. 95–106. 3. Левин М.А. Некоторые результаты исследования реакций связей деформируемого колеса // Теоретическая и прикладная механика: Тематический сборник. – Минск, 1973. – С. 3–17. 4. Левин М.А. Определение кинематических коэффициентов в теории качения // Теоретическая и прикладная механика. – Минск, 1979. – Вып. 6. – С. 53–63.

УДК 621.01

С.Е.КАРПОВИЧ, канд. техн. наук,
А.Я.ГОЛЬБИН (МРТИ)

ФОРМАЛИЗОВАННЫЙ КИНЕТОСТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГОЛОНОМНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Проблеме формализованного аналитического описания основных задач исследования кинематики и динамики механизмов посвящены работы многих авторов, в частности работы [1, 2, 3]. Наиболее значительные результаты получены Ю.Ф. Мирошкиным, который предложил новый метод исследования структуры и кинематики любых плоских и пространственных механизмов с голономными связями. Метод позволяет представлять в единой форме уравнения в обобщенных координатах, определяющих положения звеньев относительно друг друга, а также на их основе формировать дифференциальные уравнения движения механизма. Он основан на обходе координатным трехгранником всех звеньев кинематической цепи, при этом переход от одного шарнира к другому рассматривается как преобразование систем координат, зависящее от конструктивных параметров звена, а переход от звена к звену — как преобразование координатных систем, определяющих относительное положение звеньев.

Цель настоящего исследования — обобщение методов анализа голономных кинематических цепей на решение задач кинестатики. Представлен метод кинестатического исследования, позволяющий формализовать составление соответствующих уравнений и их решение в форме, удобной для выполнения расчетов на ЭВМ. Математическим аппаратом служит метод линейных пространств винтов [1, 2, 3]. Кинематические и силовые винты рассматриваются как векторы шестимерного линейного вещественного пространства. Разработанный метод интерпретируется в статье на примере промышленного робота ПР-10 (рис. 1).

Разработанная авторами теория кинестатики кинематической пары обобщается на концепции [3], согласно которой в окрестности данной точки конфигурации пары возможное перемещение раскладывается по базису

$$\delta S = \sum_{i=1}^r q_i \delta S_i^0,$$

где r — размерность линейного вещественного пространства $\{\delta S\}$, образованного множеством винтов возможных перемещений в паре, равная числу степе-