Результаты расчетов представлены на рис. 3. При расчетах использовались таблицы корней уравнения (12) [5]. Отметим очень быструю сходимость ряда (15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. — Мн., 1982. — 255 с. 2. Шульман З.П., Байков В.И., Патников В.М. Нестационарное течение неизотермической вязкопластичной пленки // Прикладная механика и реофизика. — Мн., 1983. — С. 5—14. 3. Дунец А.А., Байков В.И., Микулик О.И. Течение слоя вязкоупругой жидкости при динамических воздействиях // Реодинамика и конвекция. — Мн., 1982. — С. 12—21. 4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М., 1971. — 576 с. 5. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. — М., 1979. — 830 с.

УДК 532.516:621.822

Ю.М. ПИКУС

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ ДЛЯ НЕУПРУГОГО СМАЗОЧНОГО СЛОЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Для исследования гидродинамических процессов в смазочном слое с учетом теплообмена и совместного влияния реологического и теплофизического факторов систему уравнений неразрывности и движения жидкости (уравнения Рейнольдса) необходимо дополнить уравнением энергии, преобразованным с учетом малой толщины смазочного слоя.

Уравнение энергии получим в виде, обобщающем известные представления, основанные на понятии неупругого смазочного слоя произвольной формы [1]. Под неупругим будем понимать смазочный слой, обладающий вязкостью и пластичностью. Для описания смазочного слоя различной геометрии свяжем с одной из ограничивающих поверхностей трения ортогональную криволинейную систему координат q_1, q_2, q_3, подобную предложенной в [2]. Координатные линии $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$ являются линиями кривизны поверхности, а координата q_3 определяет расстояние по нормали к этой поверхности до точки в смазочном слое. Из преобразований, представленных в [2], следует, что коэффициенты Ляме такой системы координат

$$H_1 = A_1 \left(1 + \frac{q_3}{R_1}\right); \quad H_2 = A_2 \left(1 + \frac{q_3}{R_2}\right); \quad H_3 = 1, \tag{1}$$

где A_1, A_2 — коэффициенты основной квадратичной формы поверхности трения; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны той же поверхности.

Поскольку координата q_3 изменяется в пределах толщины смазочного слоя h, которая существенно меньше радиусов кривизны R_1 и R_2 ($\epsilon = h/R_1$; $h/R_2 \ll 1$), справедливы соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0} H_1 = A_1;\ \lim_{\epsilon\to 0} H_2 = A_2;\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_1H_2}\,\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{1}{A_1A_2}\,\frac{\partial A_1}{\partial q_2};\\
&\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_1H_2}\,\frac{\partial H_2}{\partial q_1} = \frac{1}{A_1A_2}\,\frac{\partial A_2}{\partial q_1};\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_1^2H_2}\,\frac{\partial H_2}{\partial q_1} =\\
&= \frac{1}{A_1^2A_2}\,\frac{\partial A_2}{\partial q_1};\\
&\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_1H_2^2}\,\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = \frac{1}{A_1A_2^2}\,\frac{\partial A_1}{\partial q_2};\ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_1^3}\,\frac{\partial H_1}{\partial q_1} =\\
&= \frac{1}{A_1^3}\,\frac{\partial A_1}{\partial q_1};\\
&\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{H_2^3}\,\frac{\partial H_2}{\partial q_2} = \frac{1}{A_2^3}\,\frac{\partial A_2}{\partial q_2}.
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

В качестве реологической модели примем уравнение для нелинейно-вязкопластичной жидкости, обобщающее свойства смазочных материалов [3] и устанавливающее следующую связь между компонентами тензора напряжений трения τ_{ik} и скоростей деформации $\dot{e}_{ik}$:

$$\tau_{ik} = 2(\tau_0/I + kI^{n-1})\,\dot{e}_{ik}, \qquad (3)$$

где τ_0, k, n — реологические параметры; I — интенсивность скоростей деформации: $I = (2\dot{e}_{ik}\,\dot{e}_{ki})^{0,5}$.

Выражение (3) можно представить в квазиньютоновской форме:

$$\tau_{ik} = 2\mu_a\,\dot{e}_{ik}, \qquad (4)$$

введя эффективную вязкость

$$\mu_a = \tau_0/I + kI^{n-1}. \qquad (5)$$

Наряду с использованным в выражении (3) допущением о несжимаемости смазочной среды будем полагать также не зависящими от температуры и давления ее теплопроводность λ и объемную теплоемкость $c_p\rho$.

Уравнение энергии в ортогональной криволинейной системе координат имеет вид [4]

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{v_i}{H_i}\,\frac{\partial T}{\partial q_i}\right) = \frac{\lambda}{H_1H_2H_3}\,\times$$

$$\times \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}\,\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\right) + \sum_{i,k=1}^{3} \tau_{ik}\,\dot{e}_{ik}. \qquad (6)$$

Подставив значения H_1, H_2, H_3 из выражений (1) в уравнение (6), осуществив с учетом малости ϵ предельный переход (2) и проведя ряд преобразований, получим:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{v_2}{A_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\lambda\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_1^2}+\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_2^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial q_3^2}+\frac{1}{A_1^2 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}-\right.$$

$$-\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial q_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}-\frac{1}{A_2^3}\frac{\partial A_2}{\partial q_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+$$

$$\left.+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+\frac{1}{R_1}\frac{\partial T}{\partial q_3}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)+$$

$$+\tau_{11}\dot e_{11}+\tau_{22}\dot e_{22}+\tau_{33}\dot e_{33}+2\tau_{12}\dot e_{12}+2\tau_{13}\dot e_{13}+2\tau_{23}\dot e_{23}\,. \tag{7}$$

Введем характерные значения (масштабы) эффективной вязкости, объемной теплоемкости, теплопроводности, времени, температуры, компонент скорости и размеров смазочного слоя:

$$\left.\begin{array}{l} c_p\rho\sim(c_p\rho)_x\,;\ \lambda\sim\lambda_x\,;\ t\sim t_x\,;\ T\sim T_x\,;\ \mu_a\sim\mu_{ax}\,;\\ v_1,v_2\sim u;\ v_3\sim w;\ R_1,R_2,q_1A_1,q_2A_2\sim L\,;\ q_3\sim h\,. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Используя результаты анализа уравнения неразрывности потока [1], получим оценки:

масштабов

$$t_x=L/u\,;\ w=u\,(h/L)\,; \tag{9}$$

параметров координатной поверхности

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{A_1A_2}\dfrac{\partial A_2}{\partial q_1}\sim\dfrac{1}{L}\,;\ \dfrac{1}{A_1A_2}\dfrac{\partial A_1}{\partial q_2}\sim\dfrac{1}{L}\,;\\ \dfrac{1}{A_1^2}\dfrac{\partial A_1}{\partial q_1}\sim\dfrac{1}{L}\,;\ \dfrac{1}{A_2^2}\dfrac{\partial A_2}{\partial q_2}\sim\dfrac{1}{L}\,; \end{array}\right\} \tag{10}$$

компонент тензора скоростей деформации

$$\dot e_{11},\dot e_{22},\dot e_{33},\dot e_{12}\sim u/L\,;\ \dot e_{13},\dot e_{23}\sim 1/\epsilon(u/L)\,; \tag{11}$$

компонент тензора напряжений в форме (4), (5)

$$\tau_{11},\tau_{22},\tau_{33},\tau_{12}\sim\mu_{ax}(u/L)\,;\ \tau_{13},\tau_{23}\sim 1/\epsilon\cdot\mu_{ax}(u/L)\,. \tag{12}$$

Приведем уравнение энергии (7) к безразмерному виду (сохранив для простоты те же обозначения), приняв в качестве параметров обезразмеривания характерные значения величин по соотношениям (8) – (12):

$$\frac{(c_p\rho)_x uh^2}{\lambda_x L}\left[c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{v_2}{A_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{h^2}{L^2}\lambda\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_1^2}+\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial q_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}-\frac{1}{A_1^3}\frac{\partial A_1}{\partial q_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial^2 T}{\partial q_2^2}+\frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial q_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}-\frac{1}{A_2^3}\frac{\partial A_2}{\partial q_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}\right)+\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial q_3^2}+$$

$$\left.+\frac{h}{L}\lambda\left(\frac{1}{R_1}\frac{\partial T}{\partial q_3}+\frac{1}{R_2}\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)\right]+\frac{\mu_{ax}u^2}{\lambda_x T_x}\left[\frac{h^2}{L^2}(\tau_{11}\dot e_{11}+\right.$$

$$\left.+\tau_{22}\dot e_{22}+\tau_{33}\dot e_{33}+2\tau_{12}\dot e_{12})+(2\tau_{13}\dot e_{13}+2\tau_{23}\dot e_{23})\right]. \qquad (13)$$

В уравнении (13) коэффициенты перед группой членов, определяющей конвективный теплоперенос и диссипативное тепловыделение, представляют собой безразмерные комплексы масштабов. Они образуют число Пекле $\mathrm{Pe_c} = (c_p\rho)_x uh^2/(\lambda_x L)$ в левой части и комплекс, обозначенный нами как число диссипации $\mathrm{Di} = \mu_{ax}u^2/(\lambda_x T_x)$, в правой части уравнения (13). Число $\mathrm{Pe_c}$ отличается от известного Pe наличием сомножителя h^2/L^2, характеризуется отношением конвективного и молекулярного теплопереносов и в таком виде используется в теории смазки [5]. Число Di является мерой отношения диссипативного тепловыделения в единичном объеме смазочного слоя к теплоотводу в пару трения. Аналогичный комплекс в теории ньютоновской смазки [5] называют вязкостно-температурным критерием.

В левой части уравнения (13), определяющей конвективный теплоперенос, все безразмерные слагаемые одного порядка. В правой части в группах членов, определяющих соответственно перенос теплоты за счет теплопроводности и диссипацию и заключенных в квадратные скобки, будем пренебрегать слагаемыми ϵ и ϵ^2 порядка малости $\epsilon \sim h/L \sim 10^{-2}...10^{-3}$. Тогда получим

$$\mathrm{Pe_c}c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{v_2}{A_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial q_3^2}+\mathrm{Di}\,(2\tau_{13}\dot e_{13}+2\tau_{23}\dot e_{23}). \qquad (14)$$

Дальнейший анализ (14) требует большей степени конкретизации режима смазки. Так, в условиях контактно-гидродинамической смазки обычно $\mathrm{Pe_c} \ll 1$, преобладает теплоперенос в поверхности трения, и левую часть уравнения (14) не учитывают. Наоборот, в задачах гидродинамической и особенно гидростатической смазки главным может быть конвективный тепловой поток и членом $\lambda(\partial^2 T/\partial q_3^2)$ пренебрегают. Для оценки того или иного допущения можно использовать расчет чисел Pe_c и Di по характерным значениям масштабов λ_x, μ_{ax}, $(c_p\rho)_x$, u, h, T_x, L. Возможна также обратная ситуация — определение характерных свойств смазочной среды μ_{ax}, λ_x, $(c_p\rho)_x$ или размеров смазочного слоя L, h, при которых превалирующим является конвективный или молекулярный теплоперенос. Отметим, что эффективная вязкость неньютоновской жидкости в первом приближении определяется по ее реологическим параметрам τ_0, k, n и средней скорости сдвига в потоке смазочной среды.

Приведем уравнение энергии к окончательному виду (в размерных величинах), используя определенные ранее [1] значения существенных компонент тензора скоростей деформации $\dot{e}_{13}$, $\dot{e}_{23}$ и тензора напряжений τ_{13}, τ_{23}:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_1}{A_1}\frac{\partial T}{\partial q_1}+\frac{v_2}{A_2}\frac{\partial T}{\partial q_2}+v_3\frac{\partial T}{\partial q_3}\right)=$$

$$=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial q_3^2}+\tau_{13}\frac{\partial v_1}{\partial q_3}+\tau_{23}\frac{\partial v_2}{\partial q_3}, \qquad (15)$$

где $\tau_{13}=\left(\frac{\tau_0}{I}+kI^{n-1}\right)\frac{\partial v_1}{\partial q_3}$; $\tau_{23}=\left(\frac{\tau_0}{I}+kI^{n-1}\right)\frac{\partial v_2}{\partial q_3}$;

$$I=\sqrt{(\partial v_1/\partial q_3)^2+(\partial v_2/\partial q_3)^2}.$$

В качестве примера представим уравнение энергии (15) в конической системе координат $O e\varphi\delta$ ($q_1=e$, $q_2=\varphi$, $q_3=\delta$), используя приведенные в [1] значения коэффициентов $A_1 A_2$:

$$c_p\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_e\frac{\partial T}{\partial e}+\frac{v_\varphi}{e\sin\alpha}\frac{\partial T}{\partial\varphi}+v_\delta\frac{\partial T}{\partial\delta}\right)=\lambda\frac{\partial^2 T}{\partial\delta^2}+$$

$$+\tau_{e\delta}\frac{\partial v_e}{\partial\delta}+\tau_{\varphi\delta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\delta},$$

где $\tau_{e\delta}=\left(\frac{\tau_0}{I}+kI^{n-1}\right)\frac{\partial v_e}{\partial\delta}$; $\tau_{\varphi\delta}=\left(\frac{\tau_0}{I}+kI^{n-1}\right)\frac{\partial v_\varphi}{\partial\delta}$;

$$I=\sqrt{(\partial v_e/\partial\delta)^2+(\partial v_\varphi/\partial\delta)^2}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пикус Ю.М., Алехнович Г.Н. Обобщение уравнений теории смазки реологически сложными жидкостями // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1987. — Вып. 14. — С. 122—130. 2. Струминский В.В. Трехмерный пограничный слой на произвольной поверхности // Докл. АН СССР. — Т. 108, № 4. — С. 595—598. 3. Пикус Ю.М. Гидростати-

ческая смазка вязкопластичными и вязкими жидкостями. — Мн., 1981. — 192 с. 4. Ш у л ь м а н З.П., Б а й к о в В.И., З а л ь ц г е н д л е р Э.А. Тепло- и массообмен при свободной конвекции в неньютоновских жидкостях. — Мн., 1975. — 136 с. 5. К о р о в ч и н с к и й М.В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. — М., 1959. — 403 с.

УДК 532.135+678

Д.А.АКСЕНОВИЧ

ЗАВИСИМОСТЬ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭПОКСИДНОЙ СМОЛЫ ЭД-20 ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ И ДИБУТИЛФТАЛАТА

Отвержденные эпоксидные смолы представляют собой достаточно жесткие системы и плохо выдерживают резкие перепады температур и ударные нагрузки, поэтому в чистом виде применяются редко. Для придания им гибкости и упругости после отверждения, снижения внутренних напряжений в изготовленных из них изделиях больших объемов и сложной конфигурации в эти смолы чаще всего добавляют различного рода пластификаторы. Наиболее распространенным пластификатором является дибутилфталат. Этот материал совместим со смолой, придает ей пластичность, служит разбавителем и оказывает существенное влияние на физические и химические свойства отвержденного на этой основе компаунда. Все это позволяет в известной мере регулировать свойства материалов на основе эпоксидных смол как в вязкотекучем состоянии, так и в отвержденном.

Экспериментальные исследования проводились на ротационном вискозиметре РВ-8, оборудованном специальным приспособлением для автоматизации процесса измерения времени [1]. Термостатирование системы производилось принудительной циркуляцией жидкости в зоне рабочего органа вискозиметра. Температура жидкости поддерживалась с точностью до 0,05 °С и контролировалась с помощью образцового термометра.

Для устранения влияния тиксотропии исследуемого состава перед началом каждого измерения разрушалась структура исследуемого состава путем вращения внутреннего полусфероцилиндра до получения стабильных показаний электросекундомера.

Исследования чистой смолы ЭД-20 и пластифицированных дибутилфталатом составов на ее основе показали, что у них отсутствует предельное напряжение сдвига τ_0, а кривые течения,по экспериментальным данным,имеют вид прямой в логарифмических координатах и не всегда составляют угол 45° с осями координат. Рассмотренные составы хорошо удовлетворяют степенному реологическому уравнению вида $\tau = k\dot{\gamma}^n$, где k — мера консистенции состава; $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига; n — коэффициент неньютоновского поведения материала.

Обработка экспериментальных данных проводилась по расчетным формулам [2].

Смола ЭД-20 представляет собой настолько вязкую жидкость, что даже при комнатной температуре течет очень медленно и, обладая высокими адгезионными свойствами, вызывает большие затруднения при переливании, при перемешивании с различного рода наполнителями и т.д. Путем нагревания