

## ПОПЕРЕЧНЫЙ ГРАДИЕНТ ДАВЛЕНИЯ В РЕОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим течение реологически сложной нелинейно-вязкой жидкости в цилиндрической паре трения, образованной двумя бесконечными некоаксиальными цилиндрами радиусов  $R$  и  $R_1$  ( $R_1 - R = \delta, \delta \ll R$ ), один из которых вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 1).

Введем полярную систему координат  $Or\varphi$ , взяв начало ее в центре внутреннего цилиндра  $O$ , направив ось  $r$  вверх по линии центров  $OO_1$  и выбрав в качестве положительного направления отсчета  $\varphi$  в сторону вращения цилиндра. Зазор  $h = AB$  является переменным, т.е.  $h = h(\varphi)$ , и может быть выражен соотношением

$$h \approx \delta + e \cos \varphi \approx \delta (1 + e/\delta \cos \varphi) \approx \delta (1 + \chi \cos \varphi), \quad (1)$$

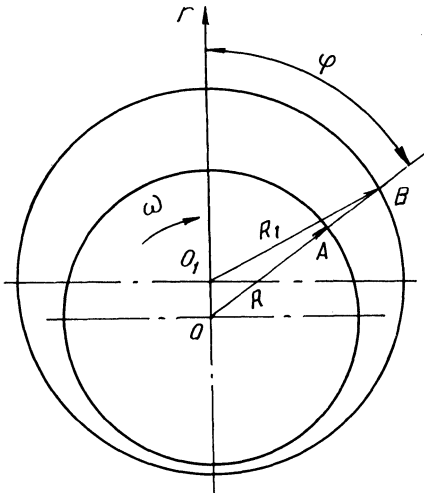


Рис. 1. Цилиндрическая пара трения

где  $\delta = R_1 - R$  — радиальный зазор;  $e = O_1O$  — эксцентриситет ( $0 \leq e \leq \delta$ );  $\chi = e/\delta$  — относительный эксцентриситет.

В качестве реологического уравнения нелинейно-вязкой жидкости используем степенную формулу, в соответствии с которой связь между компонентами тензора вязких напряжений  $\tau_{ik}$  и скоростей деформации  $\dot{e}_{ik}$

$$\tau_{ik} = 2kI^{n-1}\dot{e}_{ik}, \quad (2)$$

где  $k, n$  — реологические параметры;  $I$  — интенсивность скоростей деформации:  $I = (2\dot{e}_{ik}\dot{e}_{ki})^{1/2}$ .

Уравнения течения жидкости и неразрывности потока представим в виде:

$$\rho \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\varphi r}}{r}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}; \quad (4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0. \quad (5)$$

Уравнения (3), (4) содержат все компоненты напряжений, однако в выражениях  $\tau_{ik}, \dot{e}_{ik}, l$  отброшены слагаемые, имеющие  $\epsilon$ -порядок малости ( $\epsilon = \delta/R$ ) сравнительно с единицей. Аналогично те же слагаемые не учитываются в инерционных членах этих уравнений. Такая постановка задачи не требует обычно принимаемого в теории смазки допущения о постоянстве давления поперек смазочного слоя. Однако совместное аналитическое решение системы уравнений (2) – (5) с учетом существенной нелинейности (2) практически невозможно. Целесообразным представляется метод последовательных приближений с анализом различных определяющих параметров течения на каждой стадии решения. В данной работе рассмотрим течение смазки с учетом градиента  $\partial P/\partial r$ , используя уравнения (2), (4), (5) и учитывая некоторые дополнительные соображения.

Представим в соответствии с (2) компоненты тензора напряжений  $\tau_{rr}, \tau_{r\varphi}, \tau_{\varphi\varphi}$ , заменяя, согласно (5),  $\partial v_r/\partial r = -1/r \cdot \partial v_\varphi/\partial \varphi$  и учитывая, что  $l = \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|$ :

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= -\frac{2k}{r} \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}; \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \frac{2k}{r} \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}; \\ \tau_{r\varphi} &= k \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Давление

$$p = f_1(\varphi)/r^\alpha = f_1/r^\alpha, \quad (7)$$

где  $f_1$  – функция, подлежащая определению;  $r$  – текущий радиус;  $\alpha$  – некоторая постоянная,  $\alpha \neq 0$ .

В пределах зазора  $r$  меняется:  $R \leq r \leq R_\varphi$ , где  $R_\varphi = R + h(\varphi)$ , или с учетом (1)  $R_\varphi = R + \delta + \epsilon \cos \varphi$ .

Подставим (6), (7) в уравнение (4). При этом положим, что зависимость  $\partial v_\varphi/\partial r$  от  $r$  в малом зазоре незначительна по сравнению с зависимостью от  $\varphi$ . Сделав необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha f_1}{r^{\alpha+1}} - \frac{2k}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} + \\ &+ \frac{k}{r} (n-2) \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r \partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

Введем функцию

$$\Phi_1(\varphi) = \int f_1(\varphi) d\varphi / \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1}. \quad (9)$$

После ряда преобразований (8) с учетом (9) придем к уравнению

$$\frac{d}{d\varphi} \left[ -\frac{\alpha\Phi_1(\varphi)}{2kr^\alpha} - \frac{v_\varphi}{r} + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right] = 0. \quad (10)$$

Используя частное решение (10)

$$\frac{\alpha\Phi_1(\varphi)}{2kr^\alpha} - \frac{v_\varphi}{r} + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = 0,$$

получим

$$v_\varphi = \frac{\alpha\Phi_1(\varphi) m r^{1-a}}{2k(m-\alpha+1)} + \frac{\Phi_2(\varphi)}{r^m}, \quad (11)$$

где

$$m = \frac{1}{1 - n/2}. \quad (12)$$

Для определения  $\Phi_1(\varphi)$ ,  $\Phi_2(\varphi)$  учтем граничные условия

$$\left. \begin{aligned} v_\varphi &= \omega R && \text{при } r = R, \\ v_\varphi &= 0 && \text{при } r = R_\varphi = R + \delta + e \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из (11) и (13) найдем

$$\Phi_1(\varphi) = - \frac{2k\omega R^{m+1}(m-\alpha+1)}{\alpha m(R_\varphi^{m-\alpha+1} - R^{m-\alpha+1})}; \quad (14)$$

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{\omega R^{m+1} R_\varphi^{m-\alpha+1}}{R_\varphi^{m-\alpha+1} - R^{m-\alpha+1}}; \quad (15)$$

$$v_\varphi = - \frac{\omega R^{m+1}}{(R_\varphi^{m-\alpha+1} - R^{m-\alpha+1}) r^{\alpha-1}} + \frac{\omega R^{m+1} R_\varphi^{m-\alpha+1}}{(R_\varphi^{1-\alpha+m} - R^{1-\alpha+m}) r^m}. \quad (16)$$

Учитывая, что в соответствии с (9)  $f_{1(\varphi)} = \left| \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right|^{n-1} \frac{d\Phi_1}{d\varphi}$ , а также используя результаты (14) – (16) и принимая во внимание выражение (7), найдем ( $r = R$ ):

$$p = \frac{2k\omega \frac{2m-2}{m} R_\varphi^{m-a} (m-a+1)^2 R^{m+1-a}}{am} \times$$

$$\times \frac{[(1-a)R^{m+1-a} + mR_\varphi^{m+1-a}]^m}{(R_\varphi^{m+1-a} - R^{m+1-a}) \frac{3m-2}{m}} e \sin \varphi. \quad (17)$$

Представим распределение давления в безразмерном виде, введя вместо  $m$  (12) показатель неньютоновского поведения жидкости  $n$ , безразмерные параметры  $\bar{p} = p\delta^2 / (6k\omega^n R^2)$  и  $\chi = e/\delta, \Delta = \delta/R$ :

$$\bar{p} = \frac{\chi\Delta^3 [2+(1-a)(2-n)]^2 [1+\Delta(1+\chi\cos\varphi)]^{\frac{2-2a+na}{2-n}}}{6a(2-n)^n} \times$$

$$\times \frac{\left\{ (1-a)(2-n) + 2 \left[ 1 + \Delta(1+\chi\cos\varphi) \right]^{\frac{2+(1-a)(2-n)}{2-n}} \right\}^{n-1}}{\left\{ \left[ 1 + \Delta(1+\chi\cos\varphi) \right]^{\frac{2+(1-a)(2-n)}{2-n}} - 1 \right\}^{n+1}} \sin \varphi. \quad (18)$$

Выражения (17) или (18) позволяют оценить вклад обычно отбрасываемого в теории смазки [1] уравнения (4). Отметим, что выражения (17) и (18) отвечают граничным условиям Зоммерфельда.

Приведем пример расчета распределения давления  $\bar{p}(\varphi)$  (рис. 2), согласно (18), для значений  $a = 1$ ;  $\chi = 0,6$ ;  $\Delta = 0,002$  и показателей неньютоновского поведения жидкости  $n = 0,7$ ;  $0,9$ ;  $1$ . Результаты расчета свидетельствуют о некотором смещении максимума давления с изменением  $n$ . Такой характер распределения давления сохраняется и для других рассмотренных значений  $a$  (от  $-2$  до  $+2$ ).

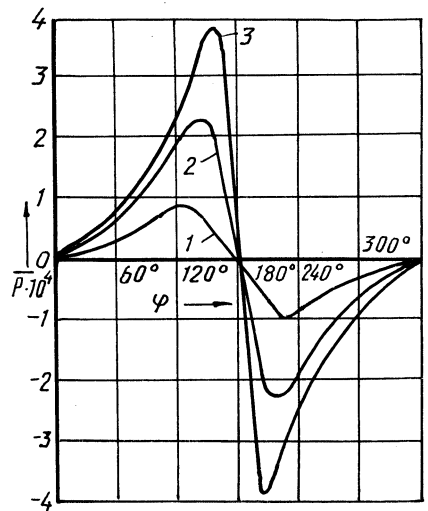


Рис. 2. Распределение давления в средах с различными показателями неньютоновского поведения при  $a = 1$ :  
 1 -  $n = 0,7$ ; 2 -  $n = 0,9$ ; 3 -  $n = 1$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Усков М.К., Максимов В.А. Гидродинамическая теория смазки: этапы развития, современное состояние, перспективы. — М., 1985. — 143 с.

УДК 532.5:532.135

Е.Н. ЛАМБИНА, Б.И. ЛАПУШИНА

### НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ВЯЗКОЙ ПЛЕНКИ

Реологические свойства реальных жидкостей зависят от температуры. Эта зависимость весьма существенна [1]. В [2] исследовано нестационарное течение неизотермической вязкопластичной пленки. Предполагается, что от температуры зависит только предел текучести  $\tau_0$ , а пластическая вязкость  $\mu_p$  остается постоянной. Поэтому результаты для аналогичного течения вязкой жидкости не могут быть получены из работы [2], так как вязкость падает с повышением температуры. Известны формула Аррениуса и приближенная формула Рейнольдса

$$\mu = \mu_0 \exp[-\alpha(T - T_0)],$$

где  $\mu_0$  — вязкость жидкости при температуре  $T_0$ .

#### 1. Постановка задач.

*Задача 1.* Рассматривается неустановившееся течение слоя несжимаемой жидкости с вязкостью, зависящей от температуры:  $\mu = \mu_1 \exp[-\alpha(T - T_1)]$ . Слой жидкости горизонтален (рис. 1).

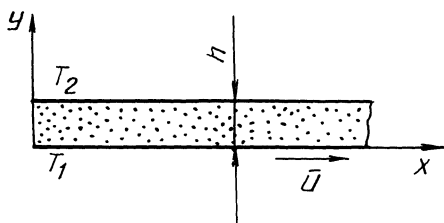


Рис. 1. Схема горизонтального течения

Течение возникает в результате сообщения границе  $y = 0$  движения со скоростью  $\varphi(t)$ . Течение предполагается ламинарным, одномерным. Требуется определить скорость  $u(y, t)$ , касательное напряжение  $\tau(y, t)$  и секундный расход

$$Q(t) = \int_0^h u dy.$$

Основные соотношения задачи: