

и величину, характеризующую корреляцию между положениями частиц в двух различных ячейках,

$$\langle \vec{q}_i, \vec{q}_j \rangle = \hat{a} \langle \vec{q}_i, \vec{q}_i \rangle = \sigma \hat{a}.$$

Эти соотношения имеют такой же вид, как и в гармоническом приближении, но величины σ и a включают ангармонические поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ротт Л.А. Статистическая теория молекулярных систем. — М., 1979. — 280 с.
2. К статистической теории фазовых переходов кристалл—жидкость, жидкость—газ / Г.С. Бокун, В.С. Вихренко, И.И. Наркевич, Л.А. Ротт // Докл. АН СССР. — 1973. — Т. 212, № 6. — С. 1328—1331.
3. Брук-Левинсон Э.Т. Межчастичные корреляции в кристалле // Докл. АН БССР, — 1977. — Т. 21, № 6. — С. 511—514.
4. Брук-Левинсон Э.Т., Белов В.В. Статистическая теория структурных и термодинамических свойств молекулярных кристаллов // ИФЖ. — 1981. — Т. 40, № 1. — С. 126—133.
5. Белов В.В. Асимптотический метод вычисления потенциалов средних сил // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1982. — Вып. 9. — С. 112—119.
6. Вихренко В.С., Комаров Г.В. Определение потенциалов средних сил в методе условных распределений на основе кумулянтных разложений интегральных уравнений // Теор. и прикл. механика. — Мн., 1988. — Вып. 15. — С. 9.
7. V i k h r e n k o V.S., B o k u n G.S., K u l a k M.I. Truncation Procedure for High Order Reduced Distribution Functions // Physica. — 1980. — V. 100A, No. 3/4. — P. 397—416.

УДК 622.276.031

2. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И НЕНЬЮТОНОВСКИХ СИСТЕМ

Р.В. ШАЙМУРАТОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПЛАСТОВЫХ ДАВЛЕНИЙ И ВОДОНАСЫЩЕННОСТЕЙ

В связи с необходимостью аналитического исследования процесса взаимовлияния пластового давления $p(x, t)$ и поля водонасыщенностей $s(x, t)$ рассмотрим следующую задачу вытеснения нефти водой без учета капиллярных сил.

Пусть полосообразная нефтяная залежь шириной L , мощностью h , пористостью m , проницаемостью k разрабатывается тремя галереями: нефтяные размещены по краям вертикально расположенной полосы, нагнетательная отстоит от левого края на расстоянии $L/2$. На крайних галереях поддерживаются равные пластовые давления $p_1 = p_2 = p_0 = \text{const}$, на нагнетательной задается постоянный расход Q на единицу длины пласта.

Ось Oy направляем вдоль нагнетательной галереи, ось Ox — перпендикулярно к ней так, что в силу симметрии можно рассматривать вытеснение нефти во-

дой в правой половине области фильтрации ($0 \leq x \leq L/2$). При этом размер L настолько большой, что по координате x среда считается полуограниченной.

Вытеснение нефти водой в этой области описывается уравнениями [1]

$$m \frac{\partial s}{\partial t} - \frac{k}{\mu_B} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_B(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0; \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{k}{\mu_H} \frac{\partial}{\partial x} \left[f_H(s) \frac{\partial p}{\partial x} \right] = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial p(0, t)}{\partial x} = \alpha Q; \quad p\left(\frac{L}{2}, t\right) = p_0; \quad (2)$$

$$s(x, 0) = q(x). \quad (3)$$

Здесь $f_B(s)$, $f_H(s)$ и μ_B , μ_H — относительная проницаемость и вязкость соответственно воды и нефти; $\alpha - \mu_B / (k f_B h)$, определяем на нагнетательной галерее; $q(x)$ — начальное распределение водонасыщенности.

Известно [1], что последняя задача может быть сведена к решению интегродифференциального уравнения относительно $s(x, t)$ и к вычислению квадратуры с учетом подвижных граничных условий при восстановлении поля пластовых давлений $p(x, t)$. Первая часть вычислительных работ даже при решении данной задачи сопряжена с определенными математическими трудностями. Поэтому при изучении поля насыщенностей $s(x, t)$ воспользуемся известной схемой Бакли—Леверетта [1], а функцию $p(x, t)$ определим как результат вычисления квадратуры по переменной области. Заметим, что двойной подход к решению задачи (1) — (3) позволяет сопоставлять результаты расчета, полученные разными путями, и тем самым контролировать достоверность проводимых исследований. При этом неиспользованные соотношения того или иного подхода являются контрольными уравнениями при сопоставлении результатов.

В безразмерных переменных $\eta = x/l$, $\tau = Qt/(lh)$, согласно схеме Бакли—Леверетта, из уравнений (1) — (3) имеем

$$\eta(s, \tau) = \frac{F'(s)}{2m} \tau + \eta(s, 0); \quad F(s) = \frac{f_B(s)}{f_B(s) + \mu_0 f_H(s)}, \quad (4)$$

где l — характерный размер пласта, $\mu_0 = \mu_B / \mu_H$.

Начальное распределение насыщенности представим в виде кривой $s(\eta, 0) = 1 / [(20\eta + 0,25)^{0,5} - 1]$ при $0 \leq s(\eta, 0) \leq 1$.

Отсюда

$$\eta(s, 0) = 0,5 [0,1 / (1+s)^2 - 0,025]. \quad (5)$$

Производную функции $F(s)$ при линейной зависимости относительных проницаемостей $f_B(s) = s$, $f_H(s) = 1 - s$ применительно к трещинным средам, а также без ограничения общности, полагая $\mu_0 = 0,5$, запишем в виде

$$F'(s) = 2 / (1+s)^2. \quad (6)$$

Подставив (5), (6) в (4) и выразив обратную функцию $0 \leq s(\eta, \tau) \leq 1$, получим искомое поле водонасыщенности

$$s(\eta, \tau) = \begin{cases} 1, \eta_c \leq \eta \leq \tau / (4m); \\ [(\tau / m + 0,05) / (\eta + 0,0125)]^{0,5} - 1, \tau / (4m) \leq \eta \leq \tau / m + 0,0375; \\ 0, \tau / m + 0,0375 \leq \eta \leq L / (2l) \end{cases} \quad (7)$$

в области $\eta_c \leq \eta \leq L / (2l)$ для любого τ , не превышающего

$$\tau = m [L / (2l) - 0,0375], \quad (8)$$

где $\eta_c = r_c / l$ — безразмерный радиус скважины-галереи.

Отсюда следует, что при достаточно больших L верхняя граница τ также велика. И напротив, по этому значению τ можно подбирать L так, чтобы выполнялись условия (7).

На рис. 1 изображены поля водонасыщенностей (7) в зависимости от η при различных значениях безразмерного времени τ , когда пористость пласта $m = 0,1$. С ростом τ область течения, занятая несмешивающимися жидкостями,

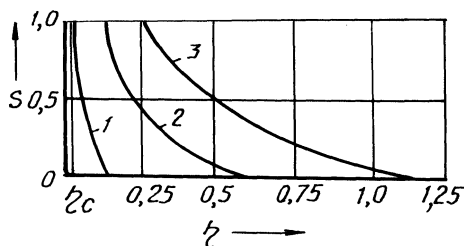


Рис. 1. Распределение водонасыщенности в пласте большой протяженности:
1 — $\tau = 0$; 2 — $\tau = 0,05$; 3 — $\tau = 0,1$

увеличивается. При этом продвижение точек с малыми значениями s значительно быстрее, чем точек, соответствующих более высокой водонасыщенности.

Для исследования влияния поля насыщенностей на пластовое давление найдем функциональную зависимость — квадратуру [1] по изменяющейся водонефтяной зоне применительно к исследуемой задаче.

Функция Грина $G_{\eta\gamma}$ является решением краевой задачи [3]

$$\frac{d^2 G}{d\eta^2} = \delta(\eta - \gamma), \quad \frac{dG}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad G \Big|_{\eta=0} = 0,$$

где через a обозначена безразмерная величина $L / (2l)$, δ — дельта-функция Дирака.

Ядром конечного интегрального преобразования по η будет $K_n = 2/a \cdot \cos(\pi\eta/a) \cdot (n + 1/2)$, $\eta = 0, \infty$.

Выполним прямое преобразование

$$\bar{G}_n = \int_0^a G \cos \frac{\pi\eta}{2a} (2n + 1) d\eta = - \frac{4a^2}{\pi^2 (2n + 1)^2} \cos \frac{\pi\gamma}{2a} (2n + 1).$$

Результат обратного преобразования запишем в виде

$$G = -\frac{4a}{\pi^2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(\eta-\gamma)}{2a} (2n+1)}{(2n+1)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(\eta+\gamma)}{2a} (2n+1)}{(2n+1)^2} \right].$$

Преобразуя каждый ряд по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} = \sum_{n+1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$$

и используя разложение [4]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi|x|}{2} + \frac{x^2}{4} \quad (|x| \leq 2\pi),$$

получим

$$G_{\eta\gamma} = \frac{1}{2} (\eta + \gamma - |\eta - \gamma| - 2a).$$

Согласно схеме, приведенной в [1], пластовое давление

$$p = \varphi + u, \quad (9)$$

где φ — решение задачи

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 p}{d\eta^2} &= 0, \quad p|_{\eta=a} = p_0, \quad \frac{dp}{d\eta}|_{\eta=0} = \frac{Q\mu_B}{2klh}; \\ u &= \frac{m}{k} \int_{\eta_c}^a \left(\frac{K'(s)}{H(s)} \frac{\partial s}{\partial t} \right)_{\gamma} G_{\eta\gamma} d\gamma; \quad K(s) = \frac{f_B(s)}{\mu_B} + \\ &+ \frac{f_H(s)}{\mu_H}, \quad H(s) = \frac{f_B f'_H - f'_B f_H}{\mu_B \mu_H}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда с учетом знака перед выражением для дебита нагнетательной галереи

$$\varphi = p_0 + \frac{Q\mu_B}{2klh} (a - \eta). \quad (11)$$

Подставив (7) в (10) и вычислив интеграл в области с подвижными границами $\tau/(4m) \leq \eta \leq \tau/m + 0,0375$, получим

$$p = p_0 + \frac{Q\mu_B}{klh} \left\{ a - \frac{1}{3} \left[\frac{\tau}{m} + \frac{1}{8} + 2 \frac{(\eta + 0,0125)^{1,5}}{(\tau/m + 0,05)^{0,5}} \right] \right\}. \quad (12)$$

Здесь для верхней границы изменения τ соблюдается условие (8). Пластовое давление в областях $\eta_c \leq \eta \leq \tau/(4m)$, $\tau/m + 0,0375 \leq \eta \leq a$ описывается формулами

$$p = p_0 + \begin{cases} \frac{Q\mu_B}{2kh} \left(2a - \eta - \frac{7}{12} \frac{\tau}{m} - \frac{1}{60} \right), \eta_c \leq \eta \leq \frac{\tau}{m}; \\ \frac{Q\mu_B}{kh} (a - \eta), \frac{\tau}{m} + 0,0375 \leq \eta \leq a, \end{cases} \quad (13)$$

которые получены с учетом равенства давлений и потока жидкостей соответственно в точках $\eta = \tau / (4m)$, $\eta = \tau / m + 0,0375$.

Заметим, что угловые коэффициенты прямых (13), характеризующие поток жидкостей соответственно в точках $\eta = \tau / (4m)$, $\eta = \tau / m + 0,0375$, равны значениям частной производной $\partial p / \partial \eta$ функции (12) в этих точках. Значения пластового давления на границе области $\tau / (4m) \leq \eta \leq \tau / m + 0,0375$ также определяются по формуле (12). Исходя из этих данных, каждая функция (13) представляет собой уравнение прямой, проведенной через заданную точку в данном направлении. При этом области $\eta_c \leq \eta \leq \tau / (4m)$, $\tau / m + 0,0375 \leq \eta \leq a$ являются зонами фильтрации соответственно воды и нефти.

Совместная фильтрация воды и нефти описывается нелинейными зависимостями (7), (12). Справедливость этих зависимостей можно проверить также с помощью интегродифференциального уравнения [1], записанного применительно к исследуемой задаче в переменных η , τ . На рис. 2 приведены поля пластовых давлений (12), (13) при $\tau = 0,05$ и $\tau = 0,1$. В расчетах принято $p_0 = 0$, $m = 0,1$, $a = 1,0375$, $\eta_c = 10^{-3}$, $Q\mu_B / (2lh) = 1$.

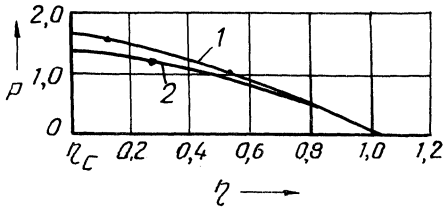


Рис. 2. Распределение пластового давления при значениях безразмерного времени:

1 - $\tau = 0,05$, 2 - $\tau = 0,1$

Из формул (12), (13) и рис. 2 следует, что на множестве независимых переменных $\eta_c \leq \eta \leq L / (2l)$, $0 < \tau \leq m (L / (2l) - 0,0375)$ значение второго слагаемого в (9) меньше основной составляющей поля пластовых давлений (11). Максимальное расхождение между ними наблюдается в окрестности нагнетательной галереи в начальный момент процесса вытеснения нефти водой. С ростом τ это расхождение уменьшается и стремится к нулю при $\eta = L / (2l)$.

В зоне фильтрации только нефти, где водонасыщенность $s = s_{\min}$, значения второй составляющей пластового давления p при $\mu_H = 2\mu_B$ удваиваются, так как угловой коэффициент прямой (13) равен $2 [Q\mu_B / (2kh)]$.

Аналогичные выводы имеют место при любых конечных значениях μ_0 . Действительно, после повторения вышеприведенной схемы исследования с учетом упрощающих выкладок при отсутствии начального возмущения $\eta(s, 0)$ имеем для водонефтяной зоны

$$p = p_0 + \frac{Q\mu_B}{2kh} \frac{1}{\mu_0} \left\{ a - \frac{1}{3} \left[\frac{\tau}{2m\mu_0} + 2\eta^{1,5} / \left(\frac{\tau}{2m\mu_0} \right)^{0,5} \right] \right\};$$

$$s = \begin{cases} 1, \eta_c \leq \eta \leq \mu_0 \tau / (2m); \\ \frac{1}{1-\mu_0} \cdot \left(\sqrt{\frac{\mu_0 \tau}{2m\eta}} - \mu_0 \right), \frac{\mu_0 \tau}{2m} \leq \eta \leq \frac{\tau}{2m\mu_0}; \\ 0, \tau / (2m\mu_0) \leq \eta \leq L/2l. \end{cases}$$

В областях, занятых водой ($s = s_{\max}$),

$$p = p_0 + \frac{Q\mu_{\text{в}}}{2kth} \left(\frac{a}{\mu_0} - \eta - \frac{1-\mu_0^3}{3\mu_0} \frac{\tau}{2m\mu_0} \right), \eta_c \leq \eta \leq \frac{\mu_0 \tau}{2m},$$

а занятых нефтью ($s = s_{\min}$),

$$p = p_0 + \frac{Q\mu_{\text{в}}}{2kth} \frac{1}{\mu_0} (a - \eta), \frac{\tau}{2m\mu_0} \leq \eta \leq \frac{L}{2l}.$$

Заметим, что эти формулы применительно к трещинным коллекторам [2] при линейной зависимости относительных проницаемостей $f_{\text{в}}$, $f_{\text{н}}$ от водонасыщенности s без принципиальных трудностей могут быть обобщены для любых гладких функций $f_{\text{в}}(s)$, $f_{\text{н}}(s)$, используемых при описании фильтрационных процессов в соответствующих породах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д а н и л о в В.Л., К а ц Р.М. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде. — М., 1980. — 264 с.
2. Ш а й м у р а т о в Р.В. Математическое моделирование взаимодействия нерегулярно размещенных скважин с неодинаковыми дебитами при разработке карбонатных пластов // Пути совершенствования поисков, разведки, бурения, разработки и добычи нефти из месторождений, приуроченных к трещинным и трещиновато-пористым коллекторам: Тез. докл. Всесоюз. научно-практ. конф. — Баку, 1982. — С. 38.
3. Ш а й м у р а т о в Р.В. Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. — М., 1980. — 222 с.
4. Г р а д ш т е й н Н.С., Р ы ж и к И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1962. — 1100 с.

УДК 532.546

А. И. ПРУСОВ, В. Б. ТАРАНЧУК

ЗАДАЧА О СКВАЖИНЕ С ЗАДАНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Рассматривается установившаяся плановая фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемом изотропном пористом пласте. Предполагается, что давление жидкости в пласте, подлежащее определению, p — гармоническая функция, а область фильтрации S — многосвязная, ограниченная контурами скважин (окружностями L_1 и L_2 с радиусами R_1 и R_2).