

### НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ГЕОМЕХАНИКИ

Целью данной работы является освещение некоторых вопросов численной реализации на ЭВМ разрешающих систем интегральных уравнений метода квазифункций Грина для решения задач теории упругости [1]. Приводится также решение задачи геомеханики об определении поля перемещений в горном массиве, ослабленном одиночной выработкой.

В работе [1] выведены системы интегральных и интегродифференциальных уравнений для решения основных задач теории упругости, основанные на понятии квазифункций Грина [2]. Так, например, одна из систем, предназначенная для решения смешанной задачи теории упругости имеет такой вид [1]:

$$u_i(x) = U_i(x) - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta_i} d_\eta D +$$

$$+ \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_i(\eta)}{\mu} F(x, \eta) d_\eta D, x \in D; \quad (1)$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial U_i(x)}{\partial x_i} - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial^2 F(x, \eta)}{\partial x_i \partial \eta_i} d_\eta D + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_i(\eta)}{\mu} \frac{\partial F(x, \eta)}{\partial x_i} d_\eta D \right], x \in D; \quad (2)$$

$$(\lambda + 2\mu) \left[ \frac{\partial}{\partial y_i} U_i(y) - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i \partial y_i} d_\eta D + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_i(\eta)}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y_i} d_\eta D \right] n_i +$$

$$+ \lambda \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{\partial U_j(y)}{\partial y_j} - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_j \partial y_j} d_\eta D + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_j(\eta)}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y_j} d_\eta D \right\} n_j +$$

$$+ \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left[ \frac{\partial U_j(y)}{\partial y_j} - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_i \partial y_j} d_\eta D + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_i(\eta)}{\mu} \frac{\partial F}{\partial y_j} d_\eta D + \frac{\partial U_j(y)}{\partial y_j} - \\
 & - \frac{\kappa}{\pi(n-1)} \int_D \theta(\eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta_j \partial y_i} d_\eta D + \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D \frac{X_j(\eta)}{\mu} \times \\
 & \times \frac{\partial F}{\partial y_i} d_\eta D] \eta_j = X_{\nu_i} \quad (i = \overline{1, n}), y \in S_\sigma; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$\vec{u}|_{S_u} = \vec{f}. \quad (4)$$

В системе уравнений (1) – (4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 u_j(x) = & - \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_S u_i(\xi) \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta_\xi} d_\xi S - \\
 & - \frac{1}{2\pi(n-1)} \int_D u_i(\eta) \Delta \eta q(x, \eta) d_\eta D;
 \end{aligned}$$

$F(x, \xi)$  – квазифункция Грина, определенная следующим образом [2]:

$$\begin{aligned}
 F(x, \xi) = & \begin{cases} \ln r^{-1} - q(x, \xi), n = 2, \\ r^{-1} - q(x, \xi), n = 3; \end{cases} \\
 q(x, \xi) = & \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)], n = 2, \\ [r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)]^{-1/2}, n = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(где в свою очередь  $\omega(x)$  – нормализованное до первого порядка уравнение границы  $S$  [2], причем  $\omega(x) > 0, x \in D \setminus S$ );  $X_i$  и  $X_{\nu_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) – соответственно компоненты объемной и поверхностной сил, действующих на тело:  $\kappa = 1/[2(1 - 2\nu)]$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\mu$  – коэффициент Ламе;  $\eta_j$  – компоненты вектора внешней нормали  $\vec{n}$  к поверхности  $S_\sigma$ ;  $S_\sigma$  – часть границы  $S$ , на которой заданы поверхностные силы, а  $S_u$  – часть границы с известными перемещениями.

Способ решения задач теории упругости, основанный на использовании квазифункций Грина, можно эффективно применять при решении задач для тел со сложной геометрией границы. К положительным моментам данного метода следует отнести то, что 1) геометрическая информация о границе области учитывается непосредственно в ядрах подынтегральных выражений посредством аппарата  $R$ -функций [2], причем характеристики ядра выписываются явно и имеют простую структуру; 2) в разрешающих интегральных уравнениях присутствуют интегральные члены, учитывающие наличие объемных сил. При решении первой основной задачи теории упругости, воспользовавшись способом аналитического продолжения граничных значений функций внутрь области [2], получают регулярные интегральные уравнения для определения

вектора перемещения  $\vec{u}$  в области  $D$ , занятой телом. Исследование ядер вида  $\Delta\eta q(x, \eta)$  и  $\partial/\partial x_j [\Delta\eta q(x, \eta)]$  на непрерывность показало [1, 2], что функцию  $\omega(x)$  необходимо строить в следующем виде:

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 \left[ \Delta\omega_0 - \frac{(\nabla\omega_0)^2 - 1}{\omega_0} \right] \quad (5)$$

(в случае плоской задачи теории упругости) и

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3 \psi \quad (6)$$

(в пространственном случае), где  $X = 1/8(2\Delta\omega_0 - 3\Phi_0)$ ;  $\psi = 1/3[2X\Delta\omega_0 - 6X^2 - 4X\Phi_0 - (\nabla\omega_0, \nabla X)]$ ;  $\Phi_0 = \omega_0^{-1}[(\nabla\omega_0)^2 - 1]$ .

Здесь  $\omega_0$  — какая-нибудь нормализованная функция для  $D$ .

Для того чтобы функция  $\omega(x)$  сохраняла знак внутри области интегрирования, можно произвести ее срезку [2]:  $\omega(x) = \omega(x) \Lambda_\alpha \epsilon$ , где  $\alpha$  близко к единице, а  $\epsilon > 0$  — малое.

При численной реализации выведенных в [1] интегральных уравнений используется метод механических квадратур.

Неизвестная плотность в интегральных уравнениях аппроксимируется интерполяционными многочленами вида

$$\vec{u}(x) = \sum_{i=0}^N u_i \varphi_i(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad (7)$$

где в качестве  $\varphi_i(x)$  выбираются либо коэффициенты Лагранжа, либо финитные функции.

При аппроксимации неизвестных плотностей интерполяционными полиномами Лагранжа в качестве узлов выбираются корни многочлена Чебышева первого рода. Для приближенного вычисления интегралов используются квадратурные формулы, построенные по методам, предложенным в [3]. Производные от интегралов с сильной особенностью вычисляются с помощью экстраполяции по нормали [4].

Построение уравнений вида (5) и (6) и вычисление их первых и вторых производных осуществляется с помощью составленных стандартных подпрограмм.

Отметим, что системы уравнений [1] можно рассматривать как системы интегральных уравнений, считая, например,  $u_i$  и  $\theta$  самостоятельными переменными, либо как системы интегродифференциальных уравнений, принимая во внимание, что  $\theta(x) = \text{div } \vec{u}$ . Во втором случае при численной реализации данных уравнений экономятся машинная память и время, но теряется точность вычислений.

С помощью системы уравнений (1) — (4) была решена задача геомеханики об определении поля перемещений в горном массиве, ослабленном одиночной выработкой. Расчетная схема представлена на рис. 1, где введены следующие обозначения:  $H$  — приведенная глубина залегания выработки;  $\rho$  — объемная плотность пород;  $\lambda = \nu/(1 - \nu)$ ;  $\nu$  — коэффициент Пуассона. На контуре  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , находящемся от начала координат на расстоянии, равном пяти характерным размерам  $|OB|$ , перемещения принимались равными нулю.

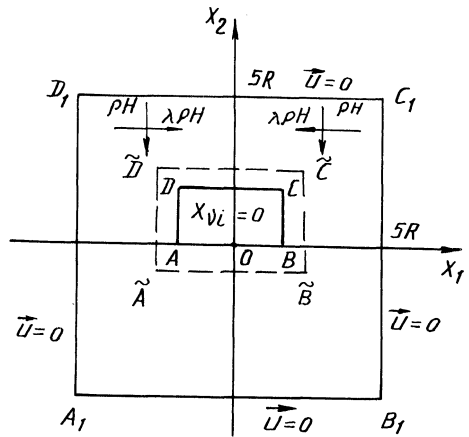


Рис. 1. Расчетная схема задачи определения поля перемещений в горном массиве, ослабленном одиночной выработкой

Контур выработки  $ABCD$  свободен от внешних усилий. Математическая постановка задачи осуществлялась следующим образом: требуется определить, воспользовавшись разрешающей системой (1) – (4), поле перемещений в тяжелом (нагруженном объемными силами  $X_2 = -\rho H$ ) упругом изотропном теле, изображенном на рис. 1, при следующих граничных условиях:  $X_{vi} = 0$  ( $i = 1, 2$ ) на  $S_1$ ;  $\vec{u}|_{S_2} = 0$ .

В данном случае система уравнений (1) – (4) рассматривалась как система интегральных уравнений относительно неизвестных  $u_1(x)$  и  $\theta(x)$ , которые аппроксимировались интерполяционными многочленами (7) с кусочно-постоянными функциями  $\varphi_i(x)$ .

Картина развития упругих деформаций, полученная по данной расчетной схеме, идентична картинам, построенным другими авторами [5].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Решение смешанной задачи теории упругости методом В.Л. Рвачева квазифункций Грина // Математические методы анализа динамических систем. — Харьков, 1985. — С. 137–141.
2. Рвачев В.Л. Теория  $R$ -функций и некоторые ее приложения. — Киев, 1982. — 551 с.
3. Копейкин Ю.Д., Аляутдинов М.И., Бормот Ю.И. Решение двухмерной задачи расчета элементов конструкций // Материалы по мат. конструкциям. — М., 1975. — Вып. 18. — С. 96–108.
4. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. — М., 1977. — 311 с.
5. Немировский Ю.В., Миренков В.Е. Некоторые контактные задачи в механике горных пород // Прикладные задачи механики горных пород. — М., 1977. — С. 101–107.