ЛИТЕРАТУРА

1. Б е л я е в Н.М. Сопротивление материалов. — М., 1976. — 618 с. 2. К р у ш е в с к и й А.Е. Вариационные методы расчета корпусных деталей машин. — Мн., 1967. — 228 с. 3. К р у ш е в с к и й А.Е., Ф е д у т а А.А. Решение задачи о совместном кручении и изгибе из плоскости кривизны бруса с круговой осью прямоугольного поперечного сечения // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1985. — Вып. 12. — С. 21—29. 4. К р у ш е в с к и й А.Е., Ф е д у т а А.А. Анализ напряженного состояния криволинейных элементов рам // Машиностроение. — Мн., 1986. — Вып. 11. — С. 112—115. 5. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник. — М., 1968. — Т. 1. — 821 с.

УДК 539.3

И.А. ЕГОРЕНКОВ, Д.Г. МЕДВЕДЕВ, И.А. ПРУСОВ

О ПРОЧНОСТИ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЕМ, ОБРАЗОВАННЫМ МЕТОДОМ ПРОКОЛА

В технике часто используются элементы конструкций в форме пластин, изготовленных из композиционных материалов, армированных тонкими нитями ортогонального переплетения с одинаковыми плотностями распределения нитей в обоих направлениях. Если эти плотности одинаковы, материал по его усредненным упругим характеристикам принято называть изотропным. В противном случае он называется ортотропным. В ряде случаев в таких пластинах делаются отверстия, что приводит к снижению прочности пластин. С целью предупреждения этого явления пластины подкрепляют кольцами или ребрами жесткости, а также делают отверстия в них методом прокола. Исследованию этого метода, основанному на оценке напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинки с одним отверстием, посвящена настоящая статья.

Рассмотрим равномерно растянутую изотропную пластинку с отверстием, образованным сверлением. Пусть в центре прямоугольной пластинки имеется отверстие, образованное сверлением. Будем предполагать, что радиус отверстия a значительно меньше размеров сторон пластинки и что ее срединная плоскость совмещена с плоскостью комплексного переменного $z = x + iy$ и занимает область $S = (\mid z \mid > a)$, ограниченную контуром L. Пластинка подвергается одноосному растяжению равномерно распределенными на бесконечности напряжениями $\sigma_x = p$ (рис. 1). Внешняя нагрузка на контуре пластинки L отсутствует.

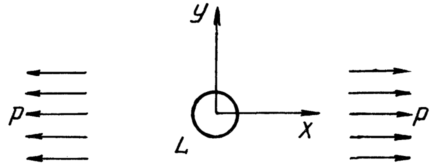

Рис. 1. Растяжение бесконечной пластинки с круговым отверстием

Поступая известным образом [1, 2] и пользуясь при этом обозначениями [2], найдем, что максимальные напряжения в пластинке имеют место в точках на оси y:

$$\sigma_\theta = p\left[1 + \frac{a^2}{2r^2}\left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right)\right], \tag{1}$$

где $r = |y|$ — расстояние от произвольной точки на оси y до начала координат.

Максимальное значение, равное $3p$, σ_θ принимает в точках на концах вертикального диаметра контура L.

Определим НДС пластинки, подкрепленной по контуру отверстия кольцом постоянного сечения. Пусть в отверстие радиуса a изотропной пластинки впаяно круглое кольцо из другого изотропного материала. Внешний и внутренний контуры кольца — окружности L ($|z| = a$) и L_1 ($|z| = b$); E и μ, E_1 и μ_1 — модули Юнга и сдвига материалов пластинки и кольца (соответственно).

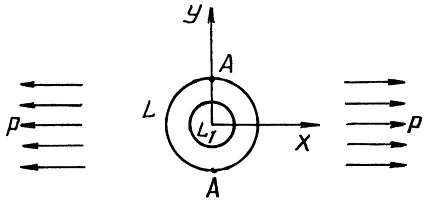

Рис. 2. Растяжение бесконечной пластинки с отверстием, подкрепленным круговым кольцом

Кольцо и пластинка одинаковы по толщине. В этом случае, считая, что пластинка подвергается одноосному растяжению напряжениями $\sigma_x = p$ (рис. 2), для нахождения σ_θ в точках пластинки, принадлежащих оси y, используем формулу

$$\sigma_\theta = \eta_1 (2 + a^2/r^2) a_0 - 3\eta_1 a_2 (a/r)^4 - \eta_4 [b_2 + (c_2 - b_0)(a^2/r^2)], \tag{2}$$

а для нахождения σ_θ на контуре L_1 кольца в точках на той же оси — формулу

$$\sigma_\theta = 4(a_0 + \eta_6 b_0) - 4[ha_2 + \eta_6 (hb_2 + c_2/h)],$$

где $a_0 = p/(4\eta_1)$; $b_2 = -p/(2\eta_4)$;

$$b_0 = \frac{(2H + h\eta_1)\, a_0}{\eta_4 + H(\eta_4 - 2)};$$

$$a_2 = \frac{[(\eta_6 - h^3)(1 - h\eta_6) - 3hH^2\eta_6^2]\, b_2}{(\eta_6 - h^3)(h - \eta_7) + 3hH^2\eta_6};$$

$$c_2 = -\frac{3Hh^2(1 - \eta_6\eta_7)\, b_2}{(\eta_6 - h^3)(h - \eta_7) + 3hH^2\eta_6};$$

$h = a^2/b^2$; $H = 1 - h$;

$$\eta_1 = \frac{1+r_2}{(1+r_1)r_2}\ ;\ \eta_4 = \frac{1+r_2}{1+r_1}\ ;$$

$$\eta_6 = \frac{r_1 - r_2}{1+r_1}\ ;\ \eta_7 = \frac{r_4 r_2 - 1}{(1+r_1)r_2}\ ;$$

$$r_1 = \frac{1+\kappa}{\varepsilon(1+\kappa_1)}\ ;\ r_2 = \frac{\varepsilon+\kappa}{1+\varepsilon\kappa_1}\ ;$$

κ и κ_1 – известные характеристики материалов пластинки и кольца [1]; $\varepsilon = \mu/\mu_1$.

Как следует из (2), σ_θ – монотонно убывающая функция в промежутке $a < r < \infty$. При $r = a$ она принимает наибольшее значение $\sigma_\theta = 3\eta_1(a_0 - a_2) - \eta_4(b_2 + c_2 - b_0)$. Эта формула позволяет оценить влияние кольца на концентрацию напряжений в точках A пластинки.

Определим НДС ортотропной пластинки с отверстием, образованным методом прокола. Предположим, что отверстие заданного радиуса получено путем внедрения в пластинку заостренного на конце цилиндра соответствующего радиуса на стадии, предшествующей ее полимеризации, либо намоткой нитей на оснастку. Такое отверстие в дальнейшем будем называть отверстием, образованным методом прокола. Радиус и контур его обозначим символами a и L. При этом предположим, что a значительно меньше других размеров пластинки; толщина пластинки равна единице; внешняя нагрузка на пластинку – растягивающие напряжения $\sigma_x = p = \text{const}$ (рис. 3).

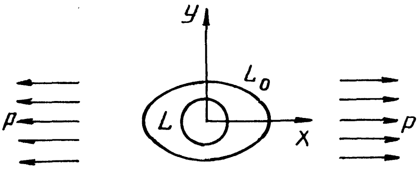

Рис. 3. Растяжение бесконечной пластинки с отверстием, образованным методом прокола

Пластинка с таким отверстием представляет собой анизотропное тело со сложными упругими характеристиками. Однако можем предположить, что область пластинки $S = S_1 + S_0$, где S_1 – область со сложными упругими характеристиками, ограниченная контуром L и некоторым контуром L_0; S_0 – область, в которой пластинку можно считать ортотропной. В ряде случаев можно считать, что L_0 – эллипс, главные оси которого совпадают с осями координат x и y.

В дальнейшем будем считать, что материал пластинки в областях S_1 и S_0 упругий. Для решения задачи необходимо знать упругие характеристики связующего и нитей, относительные плотности распределения нитей q_1 и q_2 в области S_0 в направлениях, параллельных осям x и y соответственно, а также законы распределения относительных плотностей q'_x и q'_y в области S_1 в направлении осей x и y соответственно.

В рассматриваемом случае наибольший интерес представляет распределение напряжений σ_θ на участках вдоль оси y, принадлежащих областям S_1 и S_0. Поскольку точно решить задачу о нахождении выражения такой величины трудно, ограничимся нахождением приближенного решения, полагая

$$\sigma_\theta = p\ [\ 1 + c_2\ (a/r)^2\ + c_4\ (a/r)^4] \tag{3}$$

для всех r в областях S_1 и S_0, где c_k — произвольные вещественные коэффициенты.

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что они различаются лишь коэффициентами при различных степенях r. Поэтому естественно предположить, что в рассматриваемом случае σ_θ определяется аналогичным выражением с неизвестными коэффициентами c_2 и c_4. Непрерывность функции (3) в промежутке $a \leqslant r < \infty$ — следствие непрерывности средних характеристик упругости материала пластинки в области S (по условию задачи). Для нахождения c_k поступим следующим образом.

Пусть экспериментальным путем найдено, что в некоторой точке $M \in S_o$ с координатой $r = l$ напряжение $\sigma_\theta = p_c$. Используя это условие, получим уравнение

$$\lambda c_2 + \lambda^2 c_4 = q, \tag{4}$$

где $\lambda = a^2/l^2$; $q = p_o/p - 1$.

Рассматривая затем равновесие четверти области S при де действии напряжений σ_θ вдоль оси y и напряжений $\sigma_x = p$ на бесконечности, получим соотношение $\int_a^\infty (p - \sigma_\theta)\ dr + pa = 0$, из которого выведем

$$3c_2 + c_4 = 3. \tag{5}$$

Решая уравнения (4) и (5), находим

$$c_2 = (q - 3\lambda^2)/[\lambda(1 - 3\lambda)],\ c_4 = [3(\lambda - q)/[\lambda(1 - 3\lambda)].$$

Полагая при этом в (3) $r = a$, получим формулу

$$\sigma_\theta = p\,[\,2 + \frac{2(\lambda\ - q)}{\lambda(1 - 3\lambda)}\,] \tag{6}$$

для нахождения максимальных напряжений в пластинке.

Используя формулу (6), с учетом конкретного выражения q'_x можно найти максимальное напряжение в нитях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с. 2. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. — Мн., 1972. — 200 с.