

при  $k = 1$

$$\omega^2 = - \frac{D_0 (n^2 - 1)^2 (T^2 - 1) + Eh_0 \frac{R^2}{n^4} [a^4 \frac{T^4 - 1}{T^4} + \beta^4 \ln T] - 2q\beta \frac{n^2 - 1}{nR} \frac{T - 1}{T}}{\frac{\rho h_0}{g} [ (1 + \frac{1}{n^2} + \frac{R^2}{n^4} \beta^2) \ln T + \frac{R^2}{n^4} a^2 \frac{T^2 - 1}{T^2} ]} \quad (7)$$

Из формул (5) – (7) при  $\omega^2 = 0$  можно определить также значение  $q_{кр}$ , соответствующее статической потере устойчивости оболочки с толщиной, изменяющейся по указанным законам. Основная частота колебаний таких оболочек получается минимизацией выражений для  $q_{кр}$  по числу волн в окружном направлении  $n$  при  $\beta = \pi/L$  ( $m = 1$ ). Кроме того, минимизация  $q_{кр}$  по  $\beta = m \pi/L$  и по  $n$  дает возможность определить критическое значение потоков касательных напряжений в оболочке с толщиной, изменяющейся по произвольному закону, и нагруженной скручивающими моментами по торцам.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. — М., 1966. — С. 416–420.
2. Сефер Д.В., Ершов В.Г., Косых Э.Г. О свободных колебаниях цилиндрических оболочек переменной толщины // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1985. — Вып. 12. — С. 125–128.

УДК 534.011

М.Д. МАРТЫНЕНКО, Н.А. ДОКУКОВА,  
Л.И. БОЙКО

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НОЖА РЕЖУЩЕГО АППАРАТА ЖАТКИ

Для улучшения скоростных и силовых режимов работы режущих механизмов сельскохозяйственных машин и агрегатов необходимо провести аналитическое и численное исследование их движений на основе строгих методов механики деформируемого твердого тела. Актуально определение частотных характеристик изгибно-продольных колебаний ножа жатки. Модель ножа может быть представлена балкой постоянного сечения, соединенной с двумя опорными стержнями (абсолютно жесткими телами), способными поворачиваться на малый угол  $\varphi_i = \varphi_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  (рис. 1). Задача сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, решаемых исходя из вариационного принципа Гамильтона [1]. После соответствующей линеаризации система примет вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i R L}{ES} \frac{d^2 \sin[\varphi_i(t)]}{dt^2} \delta(x - x_i); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + r^4 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i RL^3}{EI_1} \frac{d^2 \cos[\varphi_i(t)]}{dt^2} \delta(x-x_i), \quad (2)$$

где  $m_i$  — масса  $i$ -го опорного стержня единичной длины.

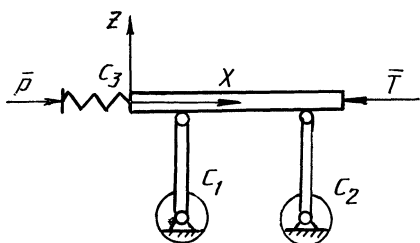


Рис. 1. К расчету изгибно-продольных колебаний ножа режущего аппарата жатки

При этом граничные условия могут быть такими:

$$ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = P(t); \quad ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = -T(t); \quad (3)$$

$$\frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0. \quad (4)$$

Углы  $\varphi_i(t)$  в (1)–(2) определяются из уравнений движения опорных стержней, интегрирование которых по методу теории сингулярно-возмущенных граничных задач [2] дает

$$\varphi_i(t) = b_1 \cos \tau + \epsilon b_2 \sin \tau + a_i [u_t''(x_i, t) + \mu w_t''(x_i, t)] + O(\epsilon^2);$$

$$\tau = t/\epsilon; \quad b_1 = \varphi_i(0) - a_i u_t''(0); \quad b_2 = \varphi_i'(0) - a_i u_t'''(0);$$

$$a_i = M_i RL \sqrt{1 - \theta^2}/c_i; \quad \mu = \theta / \sqrt{1 - \theta^2}; \quad \theta \leq 0,09;$$

$$a^2 = E/(\rho L^2); \quad r^4 = SL^4 \rho/(EI_1).$$

Искомые решения  $u(x, t)$ ,  $w(x, t)$  представим в виде рядов по полиномам Чебышева–Лагерра:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) L_n(\gamma t); \quad (5)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) L_n(\gamma t). \quad (6)$$

Здесь  $\gamma = \text{const}$ ;  $u_n(x)$ ,  $w_n(x)$  — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению из уравнений (1)–(4).

Введем следующие обозначения:

$$\omega^2 = \gamma^2 a^{-2}; \quad p^4 = SL^4 \rho \gamma^2 / (EI_1);$$

$$\beta_i = m_i RL \alpha_i \gamma^2 / (ES); \quad \eta_i = m_i RL^3 \alpha_i \gamma^2 / (EI_1);$$

$$B_{in} = \alpha_i^{-1} \sum_{k=0}^n (n+1-k) \left\{ \int_0^{\infty} (b_1 \cos \tau + \epsilon b_2 \sin \tau) e^{-\gamma \tau} L_k(\gamma \tau) d\tau - \right. \\ \left. - \alpha_i (\gamma [u'_t(x_i, 0) + \mu w'_t(x_i, 0)] + \gamma^2 (k+1) [u(x_i, 0) + \mu w(x_i, 0)]) \right\};$$

$$F_{in} = k_1 \beta_i \beta_{in} - m_i RL \gamma [\dot{\varphi}_i(0) \cos \varphi_i(0) + \gamma (n+1) \sin \varphi_i(0)] / (ES);$$

$$\Phi_{in} = -k_2 \eta_i B_{in} + m_i RL^3 \gamma [\dot{\varphi}_i(0) \sin \varphi_i(0) - \gamma (n+1) \cos \varphi_i(0)] / (EI_1);$$

$$g_{1n} = -\omega^2 \gamma \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \omega^2 (n+1) u(x, 0) + \omega^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n+1-k) u_k(x);$$

$$g_{2n} = p^4 \gamma^{-1} \mu \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} + p^4 (n+1) \mu w(x, 0) - \mu p^4 \sum_{k=0}^{n-1} (n+1-k) w_k(x);$$

$$Q_n(x_i) = \gamma^2 \sum_{k=0}^n (n+1-k) \sum_{j=0}^k (k+1-j) (u_j(x_i) + \mu w_j(x_i));$$

$$h_{in} = \begin{cases} m_i RL^3 / EI_1, & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Внося (5), (6) в (1)–(4) и интегрируя уравнения для  $u_n(x)$ ,  $w_n(x)$  на каждом из промежутков  $[0, x_1]$ ,  $[x_1, x_2]$ ,  $[x_2, 1]$ , получим следующие формулы:

$$u_n^j(x) = D_1^{(n)} \operatorname{sh}(\omega x) + D_2^{(n)} \operatorname{ch}(\omega x) + \frac{1}{\omega} \int_0^x g_{1n}(\xi) \operatorname{sh}[\omega(x-\xi)] d\xi + \\ + \frac{1}{\omega} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^j [F_{kn} + k_1 \beta_j Q_n(x_j)] S(x_j - x_k) \operatorname{sh}[\omega(x-x_k)]; \\ w_n^j(x) = C_1^{(n)} \operatorname{ch}(px) \cos(px) + C_2^{(n)} \operatorname{ch}(px) \sin(px) + \\ + C_3^{(n)} \operatorname{sh}(px) \cos(px) + C_4^{(n)} \operatorname{sh}(px) \sin(px) + \int_0^x g_{2n}(\xi) G(x, \xi) d\xi + \\ + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^j [\Phi_{kn} - k_2 \eta_j Q_n(x_j) + h_{kn}] G(x, x_k) S(x_j - x_k),$$

где

$$G(x, \xi) = \left\{ \operatorname{ch}[p(x-\xi)] \sin[p(x-\xi)] - \operatorname{sh}[p(x-\xi)] \cos[p(x-\xi)] \right\} / (4p^3);$$

$$S(x_j - x_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j \leq x_k, \\ 1, & \text{если } x_j > x_k. \end{cases}$$

В (5), (6) индексы  $j = 1, 2, 3$  соответствуют интервалам, указанным выше. Поскольку в реальном механизме стержни отклоняются на углы, не превышающие 0,09 рад, при выводе (5), (6) использована следующая линейризация:  $\sin \varphi_i(t) = k_1 \varphi_i(t)$ ,  $k_1 = 0,998856$ ;  $\cos \varphi_i(t) = 1 - k_2 \varphi_i(t)$ ,  $k_2 = 0,026738$ .

Неизвестные константы  $D_2^{(n)}$ ,  $u_n(x_1)$ ,  $u_n(x_2)$ ,  $C_1^{(n)}$ ,  $C_2^{(n)}$ ,  $C_3^{(n)}$ ,  $C_4^{(n)}$ ,  $w_n(x_1)$ ,  $w_n(x_2)$  определяются из системы алгебраических уравнений, образованной подстановкой (5), (6) в граничные условия. При этом уравнение для частотных характеристик ножа получим, приравнявая нулю определитель этой системы, который после некоторых преобразований примет вид:

$$\begin{vmatrix} \omega \operatorname{sh} \omega & Z_1(\omega, x_1) & Z_1(\omega, x_2) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch} \omega x_1 & -a_{11} & 0 & Z_2(p, x_1) & Z_3(p, x_1) \\ \operatorname{ch} \omega x_2 & a_{21} & -a_{11} & Z_2(p, x_2) & Z_3(p, x_2) \\ 0 & Z_4(\omega, x_1) & Z_4(\omega, x_2) & Z_6(p) & Z_7(p) \\ 0 & Z_5(\omega, x_1) & Z_5(\omega, x_2) & Z_8(p) & 2p Z_6(p) \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$Z_1(\omega, x_i) = k_1 \omega^4 \operatorname{ch} \omega (1 - x_i);$$

$$Z_2(p, x_i) = \mu \operatorname{ch} p x_i \operatorname{cosp} x_i;$$

$$Z_3(p, x_i) = \mu (\operatorname{ch} p x_i \sin p x_i + \operatorname{sh} p x_i \operatorname{cosp} x_i);$$

$$Z_4(\omega, x_i) = -k_2 a_{12} \omega^4 G''(1, x_i);$$

$$Z_5(\omega, x_i) = -k_2 a_{12} \omega^4 G'''(1, x_i);$$

$$Z_6(p) = -2p^2 \operatorname{sh} p \sin p;$$

$$Z_7(p) = 2p^2 (\operatorname{sh} p \operatorname{cosp} - \operatorname{ch} p \sin p);$$

$$Z_8(p) = -2p^3 (\operatorname{ch} p \sin p + \operatorname{sh} p \operatorname{cosp});$$

$$i = 1, 2;$$

$$a_{11} = \rho^2 L^2 S c_i / (m_i M_i R^2 E \sqrt{1 - \theta^2}); \quad a_{12} = L^2 S / I_1; \quad a_{21} = k_1 \omega^3 \operatorname{sh} [\omega (x_2 - x_1)] - \mu k_2 \omega^4 a_{12} G(x_2, x_1).$$

Если пренебречь влиянием изгибных колебаний ножа на продольные, иными словами положить величину  $\theta$  равной нулю, то из определителя (7) можно получить уравнение для расчета собственных частот продольных колебаний ножа режущего аппарата жатки

$$a_{11}^2 \omega \operatorname{sh} \omega + k_1 a_{11} \omega^4 [\operatorname{ch}(\omega x_1) \operatorname{ch}[\omega(1 - x_1)] +$$

$$+ \operatorname{ch}(\omega x_2) \operatorname{ch}[\omega(1-x_2)] + k_1 a_{21} \omega^4 \operatorname{ch}(\omega x_1) \operatorname{ch}[\omega(1-x_2)] = 0. \quad (8)$$

Уточнение расчета частотных характеристик (7) за счет учета кривизны срединной линии балки рассмотренного выше механизма приводит к уменьшению частот собственных колебаний по сравнению с частотами продольных колебаний. Графики зависимости частот продольных (8) и изгибно-продольных (7) колебаний ножа от жесткостей его стержней  $c_i$  и масс  $m_i$  проводятся на рис. 2.

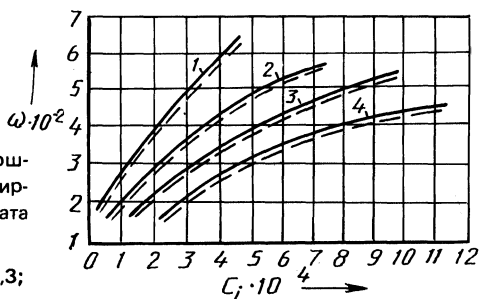


Рис. 2. Графики частот продольных (сплошная линия) и изгибно-продольных (пунктирная) колебаний ножа режущего аппарата жатки:

1 —  $m_i = 1,57$  кг/м; 2 — 3,15; 3 — 6,3;  
4 — 9,45 кг/м

В инженерных расчетах для определения частотных характеристик используется метод цепных динамических систем, который предполагает замену в расчетной модели упругих элементов абсолютно твердыми телами с упругими связями [3]. Такая дискретизация является приближенной, поскольку связана с пренебрежением упругими силами инерции. Это приводит к ошибке порядка 40 %. Предложенный расчет более строг и обоснован.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Березовский А.А. Лекции по нелинейным краевым задачам математической физики. — Киев, 1974. — 444 с. 2. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М., 1981. — 400 с. 3. Цитович И.С., Каноник И.В., Вавуло В.А. Трансмиссии автомобилей. — Мн., 1979. — 255 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ, А.А. ФЕДУТА,  
И.А. ГОРЕЦКИЙ

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГИХ ЭЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦИЙ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА—ВЛАСОВА

В настоящее время при определении напряжений в элементах конструкций с круговой осью (криволинейных стержнях) используются в инженерных расчетах гипотетические теории сопротивления материалов [1] либо хорошо известное решение задачи Головина, полученное как решение плоской задачи