У.С. Чернышенко, В.Н. Чехов и др. — Киев, 1980. – Т. 1. — 636 с. 3. Г у з ь А.Н., Л у г о в о й П.З., Ш у л ь г а Н.А. Конические оболочки, ослабленные отверстиями. — Киев, 1976. — 163 с.

УДК 624.074.4.042.8

Д.В. СЕЙФЕР

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ СКРУЧИВАЮЩИХ МОМЕНТОВ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Обычно тонкостенные оболочки нагружены различного рода статическими нагрузками, например внутренним и внешним давлением, растягивающей или сжимающей осевой силой, скручивающими моментами и др. Естественно, что спектр частот собственных колебаний оболочек зависит от диапазона изменения внешней нагрузки. Полубезмоментная "техническая" теория позволяет вывести формулы для определения этого спектра применительно к оболочкам с толщиной, изменяющейся вдоль образующих, нагруженным скручивающим моментом.

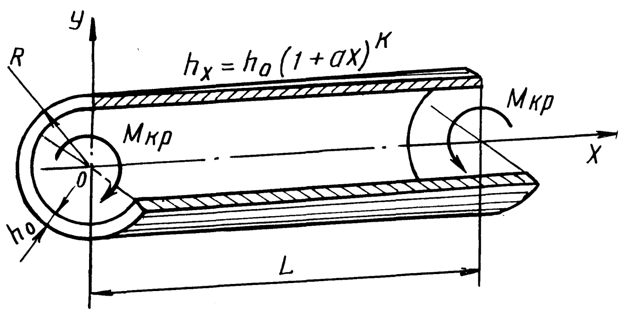

Рис. 1. Геометрические параметры и схема нагружения оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку (рис. 1), толщина которой меняется вдоль образующей по степенному закону

$$h(x) = h_0 (1 + ax)^k,$$

где h_0 — толщина оболочки на торце, совпадающем с началом координат; k — произвольное число, a — некоторый параметр, определяющий характер изменения толщины оболочки.

Исследуется влияние скручивающего момента $M_{кр}$ на частоты собственных несимметричных колебаний оболочки переменной толщины на основе аппроксимации функции прогиба срединной поверхности оболочки и принципа Лагранжа. Действующая нагрузка вызывает внутренние касательные усилия, определяемые по формуле Бредта

$$q = \tau h = M_{\text{кр}}/(2F),$$

где F — площадь контура "в свету".

При действии скручивающих моментов радиальные перемещения точек срединной поверхности будут неодинаковыми вдоль образующей и в окружном направлении. При этом отдельные кольца, на которые можно мысленно разбить оболочку, будут работать на изгиб, а в ее поперечных сечениях появятся нормальные усилия. В отличие от оболочек постоянной толщины на поверхности рассматриваемой оболочки узловые линии (образующие, все точки которой имеют нулевые радиальные перемещения в один и тот же момент времени) уже не будут иметь спиральную форму. Поэтому функцию радиальных перемещений можно записать в виде

$$w = \xi(x)\ [\psi_1(x)\cos(n\varphi) + \psi_2(x)\sin(n\varphi)]\sin(\omega t),$$

где $\psi_1(x) = \sin(m\pi x/L)$; $\psi_2(x) = \cos(m\pi x/L)$; $\xi(x)$ — искомая функция амплитуд радиальных перемещений; n — число волн в поперечном сечении ($n = 2, 3, 4$ ...); m — число полуволн вдоль образующей ($m = 1, 2, 3$ ...); L — длина оболочки; φ — угловая координата.

Предположим, что амплитуда радиальных перемещений $\xi(x)$ при неосесимметричных колебаниях оболочки переменной толщины изменяется по закону, обратному закону изменения толщины, т.е.

$$\xi(x) = h_0^{-1}(1 + ax)^{-k}.$$

Допущения, принимаемые в полубезмоментной теории, позволяют записать выражение потенциальной энергии оболочки единичной длины в следующем виде:

$$\Gamma = \oint \Big\{ \frac{1}{2} m_\varphi \kappa_\varphi + \frac{1}{2}\sigma_x h(x)\varepsilon_x - \frac{1}{2}\frac{\rho h(x)}{g} \times$$
$$\times \Big[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} w + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} v + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u\Big] - q\gamma \Big\} R d\varphi. \qquad (1)$$

Подставляя в (1) выражения величин через функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, $\xi(x)$, в силу принятых гипотез "технической" теории о нерастяжимости оболочки в окружном направлении и об отсутствии сдвигов срединной поверхности функционал энергии после интегрирования по φ примет вид

$$\Gamma = \Big\{ \frac{1}{2} D_0 (1 + ax)^{3k} \frac{(n^2-1)^2}{R^4} \xi^2(x)\ [\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)] +$$

$$+ \frac{1}{2} Eh_0 (1 + ax)^k \frac{R^2}{n^4} \Big\{ \xi''(x)\ [\psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)] + 4\xi'^2(x)\ [\psi_1'^2(x) +$$

$$+ \psi_2'^2(x)] + \xi^2(x)\ [\psi_1''^2(x) + \psi_2''^2(x)] + 4\xi'(x)\ \xi''(x)\ [\psi_1(x)\psi_1'(x) +$$

$$+ \psi_2(x)\ \psi_2'(x)] + 2\xi(x)\,\xi''(x)\ [\psi_1(x)\ \psi_1''(x) +$$

$$+ \psi_2(x)\, \psi_2''(x)] + 4\xi(x)\, \xi'(x)\, [\, \psi_1'(x)\, \psi_1''(x) + \psi_2'(x)\, \psi_2''(x)] \Big\} -$$

$$- \omega^2 \frac{\rho h_0}{2g} (1+ax)^k \Big\{ \xi^2(x)\, [\, \psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)]\, (1 + \frac{1}{n^2}) +$$

$$+ \frac{R^2}{n^4} \xi'^2(x)\, [\, \psi_1^2(x) + \psi_2^2(x)] + \frac{R^2}{n^4} \xi^2(x)\, [\, \psi_1'^2(x) + \psi_2'^2(x)] -$$

$$- q \frac{n^2-1}{nR} \xi^2(x)\, [\, \psi_1(x)\, \psi_2'(x) - \psi_2(x)\, \psi_1'(x)] \Big\} \pi R \sin^2 \omega t),$$

или

$$\Gamma = \Big\{ \frac{1}{2} D_0 \frac{n^2-1}{R^4} h_0^{-2} t_*^k + \frac{1}{2} E h_0 t_*^k \frac{R^2}{n^4} [\, k^2 (k+1)^2 a^2 h^{-2} t_*^{-2(k+2)} +$$

$$+ 2k(k-1)\, \beta^2 h_0^{-2} t_*^{-2(k+1)} + \beta^4 h_0^{-2} t_*^{-2(k+1)}] - \frac{1}{2} \frac{\rho h_0}{g} t_*^k \omega^2 [\, (1 +$$

$$+ \frac{1}{n^2} + \frac{R^2}{n^4} \beta^2)\, h_0^{-2} t_*^{-2k} + \frac{R^2}{n^4} k^2 a^2 h_0^{-2} t_*^{-2(k+1)}]^{-2} -$$

$$- q \frac{n^2-1}{nR} \beta h_0^{-2} t_*^{-2k} \Big\} \pi R \sin^2(\omega t), \qquad (2)$$

где $t_* = 1 + ax$, $\beta = m\pi / L$.

Так как в выражение (2) входит потенциал внешних сил с обратным знаком, из условия стационарности для функционала Γ получим основное разрешающее уравнение для определения квадрата частоты свободных колебаний оболочки:

$$u = \frac{0{,}5\, D_0 (n^2-1)^2 (T^{k+1} - 1)}{R^4 (k+1)} + 0{,}5 E h_0 \frac{R^2}{n^4} \Big\{ -k^2 (k+1)^2 a^4 \times$$

$$\times \frac{[T^{-(k+3)} - 1]}{k+3} - 2k(k-1)\, a^2 \beta^2 \frac{[T^{-(k+1)} - 1]}{k+1} -$$

$$- \beta^4 \frac{[T^{-(k-1)} - 1]}{k-1} \Big\} + q \frac{n^2-1}{nR} \beta \frac{[T^{-(2k-1)} - 1]}{2k-1} +$$

$$+ 0{,}5\, \omega^2 \frac{\rho h_0}{g} \Big\{ -(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{R^2}{n^4} \beta^4) \frac{[T^{-(k-1)} - 1]}{k-1} -$$

$$- \frac{R^2}{n^4} k^2 a^4 \frac{[T^{-(k+1)} - 1]}{k+1} \Big\} = 0, \qquad (3)$$

Здесь $T = 1 + aL$.

Уравнение (3) справедливо при всех значениях k, кроме $k = -3$, $k = -1$ (толщина стенки изменяется по гиперболе) и $k = 1$ (по линейному закону).

Определяем спектр квадрата частоты свободных колебаний оболочки с толщиной стенки, изменяющейся вдоль образующей по произвольному закону. Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\omega^2 = \frac{\bar\beta^4 + \dfrac{D_0 n^4 (n^2-1)^2 (k-1)(1-T^{k+1}) T^{k-1}}{Eh_0 R^2 (k+1)(1-T^{k-1})} + \dfrac{k^2 (k^2+1)(k-1)(1-T^{k+3})}{(k+3)(1-T^{k-1}) T^4} a^4 R^4}{\dfrac{\rho R^2}{gE}\left[n^2 (n^2+1) + \bar\beta^2 + \dfrac{k^2 (k-1)(1-T^{k+1})}{(k+1) T^2 (1-T^{k-1})} a^2 R^2\right]} +$$

$$+ \frac{\dfrac{2k(k-1)^2 (1-T^{k+1}) a^2 R^2 \bar\beta^2}{(k+1)(1-T^{k-1}) T^2} - \dfrac{2qn^3 (n^2-1)(k-1)(1-T^{2k-1})\bar\beta}{Eh_0 (2k-1)(1-T^{k-1}) T^k} aR}{\dfrac{\rho R^2}{gE}\left[n^2 (n^2+1) + \bar\beta^2 + \dfrac{k^2 (k-1)(1-T^{k+1})}{(k+1) T^2 (1-T^{k-1}) T^2} a^2 R^2\right]}, \quad (4)$$

где $\bar\beta = m\pi R/L$.

Выполняя предельный переход к оболочке постоянной толщины ($k = 0$), получаем формулу для спектра частот ее колебаний при кручении, приведенную в [1].

Из формулы (4) при $\omega^2 = 0$ можно определить значения $q_{кр}$, соответствующие статической потере устойчивости оболочки переменной толщины при действии скручивающих моментов. Числа полуволн в продольном и в окружном направлениях выбираются из условия минимума $q_{кр}$.

Аналогично получены выражения для квадрата частоты собственных колебаний оболочек, толщина которых изменяется в продольном направлении, при $k = -3$; $k = -1$; $k = 1$ (толщина стенки изменяется при гиперболе или по линейному закону):

при $k = -3$

$$\omega^2 = \Bigg\{\Big[\bar\beta^4 + \frac{2D_0 n^4 (n^2-1)^2 (T^2-1)}{Eh_0 R^2 T^2 (T^4-1)} + \frac{144 \ln T a^4 R^4}{T^4-1} + \frac{48 a^2 R^2 \bar\beta^2 (T^2-1)}{T^4-1} - \frac{8q(n^2-1) n^3 \bar\beta (T^7-1)}{7Eh_0 (T^4-1)}\Big] \Big[\frac{\rho R^2}{gE}\Big[4n^2 (n^2+1) + 0{,}5\bar\beta^2 + 18R^2 a^2 \frac{T^2-1}{T^4-1}\Big]\Big]\Bigg\}^{-1}; \quad (5)$$

при $k = -1$

$$\omega^2 = \frac{\dfrac{D_0 (n^2-1)^2}{R^4} \ln T + \dfrac{R^2 Eh_0 \beta^2}{n^4}\left[a^2 \ln T + 0{,}5\beta^2 (T^2-1)\right] - \dfrac{2}{3} q \dfrac{n^2-1}{nR} \beta (T^3-1)}{\dfrac{\rho h_0}{g}\left[(1+\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{R^2}{n^4}\beta^2)\cdot 0{,}5(T^2-1) + \dfrac{R^2}{n^4} a^2 \ln T\right]}; \quad (6)$$

при $k = 1$

$$\omega^2 = -\frac{\dfrac{D_0 (n^2-1)^2 (T^2-1)}{2R^4} + Eh_0 \dfrac{R^2}{n^4} [a^4 \dfrac{T^4-1}{T^4} + \beta^4 \ln T] - 2q\beta \dfrac{n^2-1}{nR} \dfrac{T-1}{T}}{\dfrac{\rho h_0}{g} [(1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{R^2}{n^4} \beta^2) \ln T + \dfrac{R^2}{n^4} a^2 \dfrac{T^2-1}{T^2}]} \qquad (7)$$

Из формул (5) – (7) при $\omega^2 = 0$ можно определить также значение $q_{кр}$, соответствующее статической потере устойчивости оболочки с толщиной, изменяющейся по указанным законам. Основная частота колебаний таких оболочек получается минимизацией выражений для $q_{кр}$ по числу волн в окружном направлении n при $\beta = \pi / L$ $(m = 1)$. Кроме того, минимизация $q_{кр}$ по $\beta = m \pi / L$ и по n дает возможность определить критическое значение потоков касательных напряжений в оболочке с толщиной, изменяющейся по произвольному закону, и нагруженной скручивающими моментами по торцам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кан С.Н. Строительная механика оболочек. – М., 1966. – С. 416–420. 2. Сейфер Д.В., Ершов В.Г., Косых Э.Г. О свободных колебаниях цилиндрических оболочек переменной толщины // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1985. – Вып. 12. – С. 125–128.

УДК 534.011

М.Д. МАРТЫНЕНКО, Н.А. ДОКУКОВА, Л.И. БОЙКО

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗГИБНО-ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НОЖА РЕЖУЩЕГО АППАРАТА ЖАТКИ

Для улучшения скоростных и силовых режимов работы режущих механизмов сельскохозяйственных машин и агрегатов необходимо провести аналитическое и численное исследование их движений на основе строгих методов механики деформируемого твердого тела. Актуально определение частотных характеристик изгибно-продольных колебаний ножа жатки. Модель ножа может быть представлена балкой постоянного сечения, соединенной с двумя опорными стержнями (абсолютно жесткими телами), способными поворачиваться на малый угол $\varphi_i = \varphi_i(t)$, $i = 1,2$ (рис. 1). Задача сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, решаемых исходя из вариационного принципа Гамильтона [1]. После соответствующей линеаризации система примет вид:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{2} \frac{m_i RL}{ES} \frac{d^2 \sin[\varphi_i(t)]}{dt^2} \delta(x - x_i); \qquad (1)$$