

В качестве примера использования предлагаемой методики приведены результаты расчета параметров нагружения сетчатого купола (рис. 1). Площади поперечного сечения и материал всех стержней приняты одинаковыми. На рис. 1 также изображены зависимости перемещений точек 1 и 2 от нагрузки $P_{пр} = [P/(EF)] \cdot 10^4$. Значение критической нагрузки $P_{пр}^{кр} = 3,364$. Отличие его от наиболее точных известных данных, приведенных в работах [3, 5], не превышает 7%. Однако предложенная методика позволяет более эффективно рассчитывать циклически симметричные многоэлементные сетчатые купола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р ы ш к и н М.Л., Г о р д е е в В.Н. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций. — Киев, 1984. — 120 с. 2. Д и н к о в и ч С.З. Спектральная теория циклических матриц и расчет циклических конструкций // Расчет пространств конструкций. — М., 1971. — Вып. 14. — С. 153—172. 3. Решение задач общей устойчивости сильно нелинейных вантово-стержневых систем / В.Н. Кислоокий, А.В. Шимановский, Г.С. Лазарева, А.Б. Крицкий // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1985. — № 9. — С. 28—33. 4. П е т р о в В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. — Саратов, 1975. — 120 с. 5. С а у л и с А.А., М а ц и л я в и ч у с Д.А. Матричный метод расчета упругих геометрически нелинейных шарнирно-стержневых систем // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, № 6. — С. 21—24.

УДК 539.3

С.Ф. АНДРЕЕВ, Г.Ф. ЕРШОВ, Э.Г. КОСЫХ

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ОТВЕРСТИЯМИ

Тонкостенные оболочки весьма разнообразны по геометрии, материалам, условиям закрепления краев и эксплуатации. К особой группе можно отнести оболочки с отверстиями. В исследованиях сферических, конических и цилиндрических оболочек с отверстиями наиболее широко применяются методы разделения переменных, малого параметра и аналитических функций [2].

В настоящей работе ставится задача расчета возмущенного отверстием напряженно-деформированного состояния оболочки вращения с выпуклой криволинейной образующей.

Рассмотрим класс оболочек вращения с отверстиями, срединная поверхность которых незначительно отличается от конической, с углом полураствора $\alpha_{экр}$ (рис. 1). Будем рассматривать оболочки, для которых отношение вы-

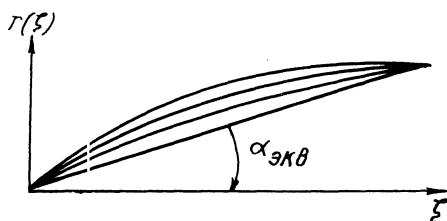


Рис. 1. Контуры исследуемых тел вращения

соты к диаметру основания постоянно. Эту величину, следуя [1], назовем удлинением оболочки и обозначим $\lambda_{\text{экв}}$.

Для любой эквивалентной исследуемым оболочкам конической поверхности угол полураствора будем определять по формулам:

$$\alpha_{\text{экв}} = \arccos (2 \lambda_{\text{экв}} / \sqrt{1 + 4 \lambda_{\text{экв}}^2}); \quad \alpha_{\text{экв}} = \text{arctg} [1 / (2 \lambda_{\text{экв}})] .$$

Следуя [1], запишем уравнения обводов исследуемых оболочек вращения:

для тела вращения степенной формы

$$r = r_{\mu} (\xi / \xi^*)^m ;$$

для параболического тела вращения

$$r = r_{\mu} [\xi / \xi^* (2 - \xi / \xi^*)]^m ;$$

для оживала Кармана

$$r = r_{\mu} \sqrt{2 / \pi \arcsin \sqrt{\xi / \xi^* - (1 - 2 \xi / \xi^*)} \sqrt{\xi / \xi^* (1 - \xi / \xi^*)}} .$$

Здесь r_{μ} — радиус миделя оболочки; ξ^* — высота оболочки; ξ — высота произвольного сечения; m — показатель степени ($m = 0,5 \dots 0,8$).

Как известно, возмущенное состояние возле отверстия определяется решением дифференциального уравнения

$$\Delta \Delta \Phi + 8 i \beta^2 \Delta_* \Phi = 0, \quad (1)$$

где $\Phi = \frac{E h^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} w + i u$ — искомая комплексная функция; w, u — функции прогибов и напряжений;

$$\Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right];$$

$$\Delta_* = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} K_{\beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} K_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right] -$$

дифференциальные операторы в криволинейных ортогональных координатах α и β ; $A, B, K_{\alpha}, K_{\beta}$ — коэффициенты Ламе и главная кривизна в соответствующих сечениях; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона; h — толщина стенки оболочки.

Срединную поверхность исследуемых оболочек представим [3] в координатах l и ψ (рис. 2), заданных на развертке эквивалентного конуса. В этой системе координат разрешающее уравнение (1) запишем в виде

$$\Delta \Delta \Phi + 8 i \beta^2 \left[F_1(l) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial l^2} + F_2(l) \frac{\partial \Phi}{\partial l} + F_3(l) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} \right] = 0, \quad (2)$$

где

$$F_1(t) = \frac{K_\beta(t)}{A^2(t)} ; F_2(t) = \frac{1}{A(t)B(t)} \frac{\partial}{\partial t} \left[K_\beta(t) \frac{B(t)}{A(t)} \right];$$

$$F_3(t) = \frac{K_\alpha(t)}{B^2(t)} . \quad (3)$$

Так как

$$A_\alpha(t) = \sqrt{\cos^2 \alpha_{\text{ЭКВ}} + [r'(t)]^2}; A_\beta(t) = \frac{r(t)}{\sin \alpha_{\text{ЭКВ}}};$$

$$K_\alpha(t) = r''(t) \frac{\cos \alpha_{\text{ЭКВ}}}{A_\alpha^3(t)} ; K_\beta(t) = \frac{\cos \alpha_{\text{ЭКВ}}}{r(t) A_\alpha(t)}, \text{ то}$$

$$F_1(t) = \frac{\cos \alpha_{\text{ЭКВ}}}{r(t) A_\alpha^3(t)} ; F_2(t) = -4\lambda_{\text{ЭКВ}} \frac{r'(t) r''(t) \sin \alpha_{\text{ЭКВ}}}{r(t) A_\alpha^3(t)} ;$$

$$F_3(t) = - \frac{r''(t) \cos \alpha_{\text{ЭКВ}} \sin^2 \alpha_{\text{ЭКВ}}}{r^2(t) A_\alpha^3(t)} ,$$

где $\alpha_{\text{ЭКВ}}$ – угол полураствора эквивалентного конуса.

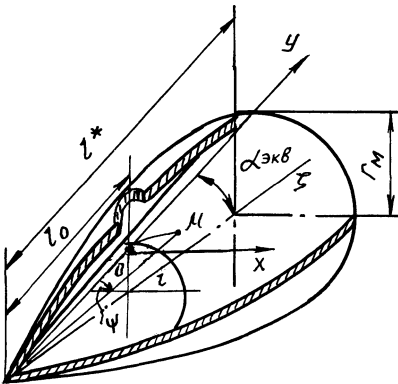


Рис. 2. К расчету оболочки вращения по полугеодезическим координатам эквивалентного конуса

Введем безразмерные координаты точки M (см. рис. 2) $x = l \rho_0^{-1} \sin \psi, y = \rho_0^{-1} (l \cos \psi - l_0)$ таким образом, чтобы их начало совпадало с центром O отверстия (см. рис. 2), ось y была направлена вдоль образующей эквивалентного конуса, а ось x – вдоль направляющей. Здесь ρ_0 – характерный радиус контура отверстия, l_0 – расстояние от вершины эквивалентного конуса до точки O . В выбранной системе координат $K_\alpha(t) < 0$ и $K_\beta(t) < 0$, поэтому функ-

ции (3), определенные в интервале $-1 \leq \xi \leq 1$, представим в виде интерполяционных многочленов

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1(\tilde{l}) &= -\rho_0^{-1} \sum_{k=1}^{m_1} a_k \tilde{l}^{(-k)}; \quad \tilde{F}_2(\tilde{l}) = -\rho_0^{-2} \sum_{k=2}^{m_2} b_k \tilde{l}^{-k}; \\ \tilde{F}_3(\tilde{l}) &= -\rho_0^{-3} \sum_{k=3}^{m_3} c_k \tilde{l}^{-k}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{l} = l/\xi^*$.

Из уравнения (2)

$$\Delta \Delta \tilde{\Phi} - 8i \tilde{\beta}^2 \sum_{k=1}^m [a_k \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{l}^2} + b_k \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{l}} + c_k \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \psi^2}] = 0,$$

где $m > m_j$ ($j = 1, 2, 3$).

Так как в координатах xOy для безразмерной функции $\tilde{\Phi}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{l}} &= \frac{\tilde{l}_0}{\tilde{l}} \left[\frac{x}{\tilde{l}_0} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} + \left(1 + \frac{y}{\tilde{l}_0}\right) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} \right]; \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{l}^2} &= \left(\frac{\tilde{l}_0}{\tilde{l}}\right)^2 \left[\left(\frac{x}{\tilde{l}_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{y}{\tilde{l}_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{x}{\tilde{l}_0} \left(1 + \frac{y}{\tilde{l}_0}\right) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} \right]; \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \psi^2} &= \tilde{l}_0^2 \left[\left(1 + \frac{y}{\tilde{l}_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + \left(\frac{x}{\tilde{l}_0}\right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{x}{\tilde{l}_0} \left(1 + \frac{y}{\tilde{l}_0}\right) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y} \right], \end{aligned}$$

имеем [3]

$$\Delta \Delta \tilde{\Phi} - 8i \tilde{\beta}_{\text{экв}}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} = 8i \tilde{\beta}_{\text{экв}}^2 \left[\sum_{j=1}^{\infty} (\Pi_j \tilde{\Phi}) \tilde{l}_0^{-j} + f(x, y) \right]. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\beta}_{\text{экв}}^2 = \tilde{\beta}^2 a_1 \tilde{l}_0^{-1}$; Π_j ($j = 1, 2, 3$) — дифференциальные операторы, соответствующие возмущенному состоянию конической оболочки возле отверстия; $f(x, y)$ — добавочная функция, обращающаяся в нуль для конической оболочки ($a_1 = \text{ctg} \alpha_{\text{экв}}$, $a_{k+1} = 0$; $b_k = 0$; $c_k = 0$ при $k \geq 1$).

Очевидно, что при малых отклонениях срединной поверхности исследуемой оболочки от поверхности эквивалентного конуса значение функции

$f(x, y)$ мало. О ее значениях можно судить по графикам функции (4) (рис. 3), построенным для различных оболочек одинакового удлинения $\lambda_{\text{экв}}$. Сравнивая последние, убеждаемся, что значения функции $f(x, y)$ возрастают с увеличением главной кривизны.

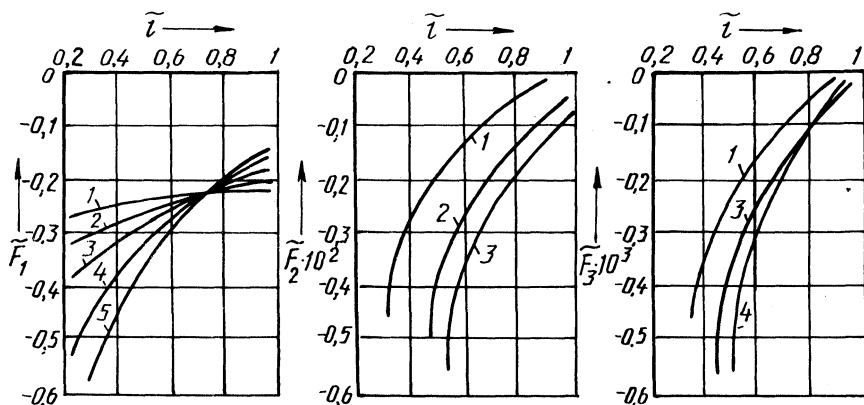


Рис. 3. Графики функций поверхности исследуемой оболочки степенной формы с удлинением $\lambda_{\text{экв}} = 1$;
 1 - $m = 0,2$; 2 - $m = 0,4$; 3 - $m = 0,6$; 4 - $m = 0,8$; 5 - $m = 1$

Поскольку правая часть уравнения (5) частично разложена в степенной ряд по малому параметру \tilde{l}_0^{-j} ($j = 1, 2, \dots, n$), то

$$f(x, y) = \frac{1}{a_1} \sum_{j=1}^{\infty} (D_j \tilde{\Phi}) \tilde{l}_0^{-j},$$

где D_j — дифференциальные операторы ($D_1 = b_2 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} + c_3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2}$, $D_2 = (c_4 + 2c_3 y) \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} + b_2 x \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} + (3b_2 + b_3) \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} - 2c_3 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x \partial y}$).

Окончательно запишем

$$\Delta \Delta \tilde{\Phi} - 8i \tilde{\beta}_{\text{экв}}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} = 8i \tilde{\beta}_{\text{экв}}^2 \sum_{j=1}^n \left(\Pi_j + \frac{D_j}{a_1} \right) \tilde{\Phi} \tilde{l}_0^{-j},$$

Решением полученного уравнения методами, предложенными в работах [2, 3], можно найти поле напряженной оболочки в возмущенном состоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэромеханика сверхзвукового обтекания тел вращения степенной формы / Под ред. Г.Л. Гроздовского. — М., 1975. — 184 с.
2. Методы расчета оболочек / А.Н. Гузь,

УДК 624.074.4.042.8

Д.В. СЕЙФЕР

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ СКРУЧИВАЮЩИХ МОМЕНТОВ НА СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Обычно тонкостенные оболочки нагружены различного рода статическими нагрузками, например внутренним и внешним давлением, растягивающей или сжимающей осевой силой, скручивающими моментами и др. Естественно, что спектр частот собственных колебаний оболочек зависит от диапазона изменения внешней нагрузки. Полубезмоментная "техническая" теория позволяет вывести формулы для определения этого спектра применительно к оболочкам с толщиной, изменяющейся вдоль образующих, нагруженным скручивающим моментом.

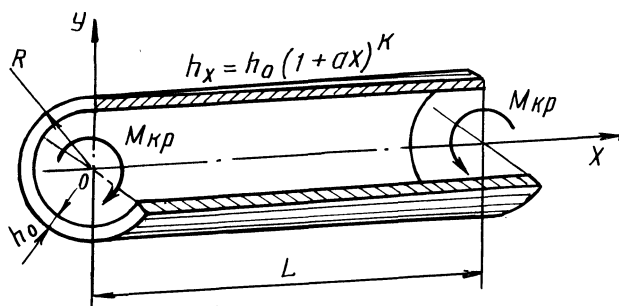


Рис. 1. Геометрические параметры и схема нагружения оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку (рис. 1), толщина которой меняется вдоль образующей по степенному закону

$$h(x) = h_0 (1 + ax)^k,$$

где h_0 — толщина оболочки на торце, совпадающем с началом координат; k — произвольное число, a — некоторый параметр, определяющий характер изменения толщины оболочки.

Исследуется влияние скручивающего момента $M_{кр}$ на частоты собственных несимметричных колебаний оболочки переменной толщины на основе аппроксимации функции прогиба срединной поверхности оболочки и принципа Лагранжа. Действующая нагрузка вызывает внутренние касательные усилия, определяемые по формуле Бредта