

РАСЧЕТ СЕТЧАТЫХ КУПОЛОВ ПО ДЕФОРМИРОВАННОЙ СХЕМЕ

При проектировании сетчатых куполов необходимо учитывать опасность потери их устойчивости при деформировании. Метод статической эквивалентности дает в случае нерегулярной решетки и существенно неравномерной нагрузки недостаточно надежные результаты. Наиболее логичным и точным представляется расчет сетчатых куполов как дискретных систем, который в конечном итоге приводит к системе линейных уравнений высокого порядка.

В данной статье для расчета используется комбинированный метод [4] с применением аппарата спектрального разложения квазициклических матриц [2]. Предлагаемая методика позволяет учесть циклическую симметрию сетчатых куполов, за счет чего можно значительно понизить порядок системы разрешающих уравнений.

Допустим, что узлы сетчатого купола расположены на сфере радиуса R и соединения стержней шарнирные, l_{ij} — длина стержня, соединяющего i -й и j -й узлы.

Предполагая, что конструкция состоит из n одинаковых фрагментов, каждый из которых повернут вокруг вертикальной оси конструкции на угол $2\pi/n$ по отношению к предыдущему, запишем уравнения равновесия узлов, выделив отдельно уравнения равновесия узла в вершине купола:

$$A_1 \delta_1 + \sum_{k=1}^n B_{12}^k \delta_2^k = P_1; \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_1 \delta_1 + D \Delta_1 + C \Delta_2 + C^T \Delta_n &= P_2; \\ H_2 \delta_1 + C^T \Delta_1 + D \Delta_2 + C \Delta_3 &= P_3; \\ \dots & \\ H_n \delta_1 + C \Delta_1 + D \Delta_n + C^T \Delta_{n-1} &= P_n. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь A — диагональная матрица порядка 3×3 ; δ_1 — вектор смещения узла, находящегося в вершине; B_{12} — матрица порядка 3×3 , рассмотренная ниже; δ_2^k — вектор смещения 2-го узла k -го фрагмента; Δ_n — мультивектор размерности $3m$ ($m = N/n$), образованный из векторов смещений всех узлов k -го фрагмента (1-й узел считается не входящим ни в один фрагмент); H_k — матрица размерности $3m \times 3$; D, C — квадратные матрицы порядка $3m$; знак "Т" означает транспонирование матрицы.

Введем в рассмотрение комплексное число Z_p^{k-1} ($k = 1, \dots, n$) аналогично [1]. Умножая все уравнения системы (2) на это число и складывая их, получим выражение:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} H_k \delta_1 + [D + Z_p C + \bar{Z}_p C^T] \left[\sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} \Delta_k \right] = \\ = \sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} P_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее черта над буквой означает комплексное сопряжение. Рассмотрим матрицу

$$\sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} H_k = \left[\sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} B_{12}^T, 0 \right], \quad (4)$$

в которой B_{12} имеет вид

$$B_{12}^T = d_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\beta^2 \sin(k-1) \frac{2\pi}{n} & -\beta^2 \cos(k-1) \frac{2\pi}{n} & -\beta\gamma \\ \gamma\beta \sin(k-1) \frac{2\pi}{n} & \beta\gamma \cos(k-1) \frac{2\pi}{n} & \gamma^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $d_{12} = \frac{EF_{12}}{l_{12}}$; $\beta = \frac{R}{l_{12}} \sin\varphi_1$; $\gamma = \frac{l_{12}}{2R}$; φ_1 — угол между радиусами-векторами, проходящими через 1-й и 2-й узлы.

Подставив (5) в (4) и выполнив преобразования, придадим матрице (4) вид

$$\sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} H_k = H^{(p)} = [B^{(p)}, 0].$$

Причем

$$B^{(0)} = d_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix}; \quad B^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ ic_1 & c_1 & 0 \\ ic_2 & c_2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B^{(n-1)} = \bar{B}^{(1)};$$

$B^{(p)} = [0]$ при $1 < p < n-1$; $b_1 = -nb\gamma$; $b_2 = n\gamma^2$.

Умножив обе части уравнения (1) слева на A_0^{-1} и подставив найденное значение b_1 в выражение (3), получим

$$[D_p + \bar{Z}_p C + Z_p C^T] X_p = F_p, \quad (6)$$

где

$$X_p = \sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} \Delta_k; \quad F_p = \sum_{k=1}^n Z_p^{k-1} P_k - H^{(p)} A_1^{-1} P_1^0;$$

$D_p = D - R^{(p)}$; $R^{(p)} = [T^{(p)}, 0]$ — матрица размерности $3m \times 3m$; $p = 1, \dots, n-1$; $T^{(p)} = T^{(1)}$ при $p = 1, n-1$;

$$T^{(0)} = d_{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & \beta\gamma \\ 0 & \beta\gamma & \gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение уравнений (1), (2), имеющих порядок $3N+3$, свелось к решению нескольких систем, каждая из которых имеет порядок $3N/n$. Отметим, что для значений q , равных 1 и $n-1$, выражение (6) дает комплексно-сопряженные уравнения. Следовательно, число различных систем будет равно $(n+2)/2$, если n четно, и $(n+1)/2$, если n нечетно.

После определения X_p векторы смещений Δ_k выражаются с помощью соотношений

$$\Delta_k = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} Z_p^{k-1} X_p \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Расчет по деформированной схеме сведем к итерационному процессу, участвующему на каждом l -м шаге изменение продольных сил. Тогда разрешающая система уравнений будет иметь вид

$$\Delta X_p^{(l)} = [R(\Delta X_p^{(l)})]^{-1} \Delta F_p^{(l)}, \quad (7)$$

$$\text{или } f(\Delta X_p^{(l)}) = R(\Delta X_p^{(l)}) \Delta X_p^{(l)} - \Delta F_p^{(l)} = 0, \quad (8)$$

$$\text{где } R^{(l)} = [D_p + \bar{Z}_p C + Z_p C^T].$$

Для решения системы (8) воспользуемся методом Ньютона—Канторовича, в соответствии с которым

$$\Delta X_{p(j+1)}^{(l)} = \Delta X_{p(j)}^{(l)} - [f'(\Delta X_{p(0)}^{(l)})]^{-1} f(\Delta X_{p(j)}^{(l)}), \quad (9)$$

где

$$f'(\Delta X_{p(0)}^{(l)}) = \left[\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial \Delta X_{p(c,d)}} \right]_{b,d=1}^m \right]_{a,c=1}^n$$

матрица Якоби вектор-функции $f(\Delta X_{p(j)}^{(l)})$; $\Delta X_{p(0)}^{(l)}$ — начальное приближение.

Можно показать, что в случае скалярной функции скалярного аргумента матрица Якоби совпадает с квазициклической матрицей $R^{(l)}$ линеаризованной системы (7).

Подставляя выражение (8) в формулу (9), получим

$$\Delta X_{p(j+1)}^{(l)} = \Delta X_{p(j)}^{(l)} - [R(\Delta X_{p(0)}^{(l)})]^{-1} [R(\Delta X_{p(j)}^{(l)}) \Delta X_{p(j)}^{(l)} - \Delta F_p^{(l)}].$$

Запись $R(\Delta X_{p(j)}^{(l)})$ означает, что матрица жесткости конструкции вычислена с учетом изменения координат узлов за счет приращений перемещений $\Delta X_{p(j)}^{(l)}$.

Полагая $R_p^{(l+1)} = R(\Delta X_{p(j)}^{(l)}) \Delta X_{p(j)}^{(l)} - \Delta F_p^{(l)}$, приходим к линейной квазициклической системе уравнений

$$R_p^{(l+1)} \Delta X_{p(j+1)}^{(l+1)} + R_p^{(l+1)} = 0. \quad (10)$$

Вычисления по формуле (10) выполняются в пределах одного нагружения при $j = 0, 1, \dots, n$ до получения вектора $\Delta X_{p(n+1)}^{(l)}$, совпадающего с вектором $\Delta X_{p(n)}^{(l)}$. Затем выполняется расчет на следующий шаг.

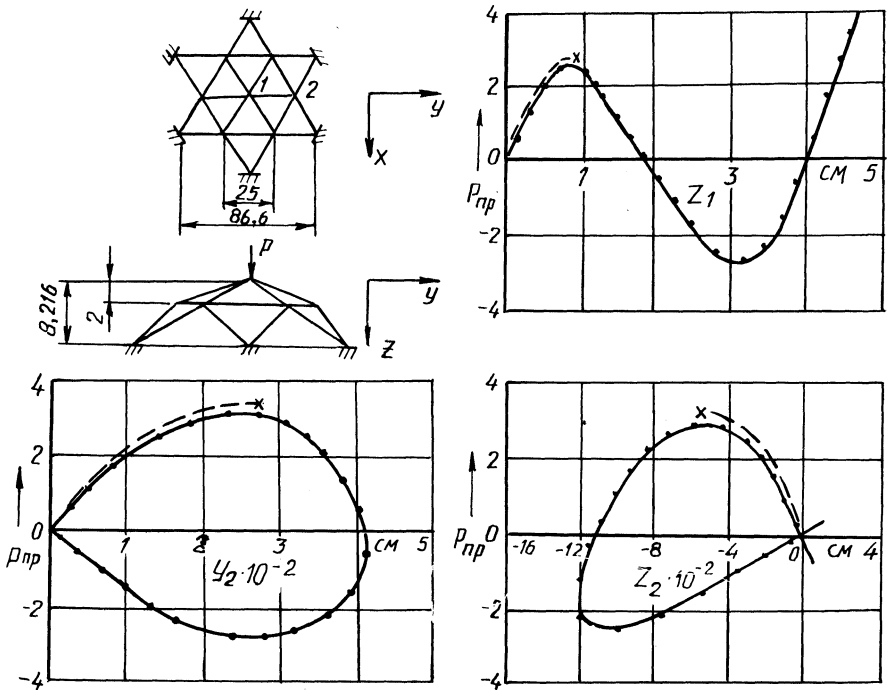


Рис. 1. Расчетная схема и результаты расчета сетчатого купола:

----- решение авторов; — по [3]; по [5]

В качестве примера использования предлагаемой методики приведены результаты расчета параметров нагружения сетчатого купола (рис. 1). Площади поперечного сечения и материал всех стержней приняты одинаковыми. На рис. 1 также изображены зависимости перемещений точек 1 и 2 от нагрузки $P_{пр} = [P/(EF)] \cdot 10^4$. Значение критической нагрузки $P_{пр}^{кр} = 3,364$. Отличие его от наиболее точных известных данных, приведенных в работах [3, 5], не превышает 7%. Однако предложенная методика позволяет более эффективно рассчитывать циклически симметричные многоэлементные сетчатые купола.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б у р ы ш к и н М.Л., Г о р д е е в В.Н. Эффективные методы и программы расчета на ЭВМ симметричных конструкций. — Киев, 1984. — 120 с. 2. Д и н к о в и ч С.З. Спектральная теория циклических матриц и расчет циклических конструкций // Расчет пространств конструкций. — М., 1971. — Вып. 14. — С. 153—172. 3. Решение задач общей устойчивости сильно нелинейных вантово-стержневых систем / В.Н. Кислокий, А.В. Шимановский, Г.С. Лазарева, А.Б. Крицкий // Изв. вузов. Сер. Стр-во и архитектура. — 1985. — № 9. — С. 28—33. 4. П е т р о в В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек. — Саратов, 1975. — 120 с. 5. С а у л и с А.А., М а ц и л я в и ч у с Д.А. Матричный метод расчета упругих геометрически нелинейных шарнирно-стержневых систем // Прикл. механика. — 1980. — Т. 16, № 6. — С. 21—24.

УДК 539.3

С.Ф. АНДРЕЕВ, Г.Ф. ЕРШОВ, Э.Г. КОСЫХ

К РАСЧЕТУ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С ОТВЕРСТИЯМИ

Тонкостенные оболочки весьма разнообразны по геометрии, материалам, условиям закрепления краев и эксплуатации. К особой группе можно отнести оболочки с отверстиями. В исследованиях сферических, конических и цилиндрических оболочек с отверстиями наиболее широко применяются методы разделения переменных, малого параметра и аналитических функций [2].

В настоящей работе ставится задача расчета возмущенного отверстием напряженно-деформированного состояния оболочки вращения с выпуклой криволинейной образующей.

Рассмотрим класс оболочек вращения с отверстиями, срединная поверхность которых незначительно отличается от конической, с углом полураствора $\alpha_{экр}$ (рис. 1). Будем рассматривать оболочки, для которых отношение вы-

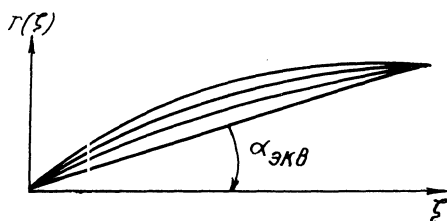


Рис. 1. Контуры исследуемых тел вращения