

$$P = \iint_{(S)} P_{zz} \Big|_{z=h} dx/du.$$

Пример. Определить  $P_{zz} \Big|_{z=h}$  в точках  $x = 0, y = 0; x = 40, y = 0$ , если  $h = 10$  см,  $E = 200$  МПа,  $\sigma = 0,3$ ,  $L = 40$  см,  $b = 20$  см.

По формуле (4) находим: при  $x = 0, y = 0$   $P_{zz} = -85$  Н,  $x = 40, y = 0$   $P_{zz} = -165$  Н.

УДК 539.374

Э.И. СТАРОВОЙТОВ

### ИЗГИБ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ В УСЛОВИЯХ АБЛЯЦИИ

Задача о малых деформациях трехслойных вязкоупругопластических пластин при изотермическом нагружении рассмотрена в [1]. В настоящей работе усложнена расчетная математическая модель за счет учета неизотермичности нагружения и возможности уноса вещества с поверхности пластинки (абляции).

Рассматривается несимметричная по толщине круглая трехслойная пластинка, геометрия которой отвечает модели Э.И. Григолюка [2]. Для тонких несущих слоев из металла (с толщинами  $h_1 \neq h_2$ ) принимаются гипотезы Кирхгофа, а для слоя полимерного заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) — гипотеза о прямолинейности и нежимаемости деформированной нормали. Учитывается работа заполнителя в тангенциальном направлении. Цилиндрическая система координат  $r, \varphi, z$  связана со срединной плоскостью слоя заполнителя.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем физические уравнения состояния, введенные В.В. Москвитиним [3]:

для несущих слоев

$$s_a^k = 2G^k(T^k) \left[ f_1^k(\epsilon_u^k, T^k) \varepsilon_a^k - \int_0^t \Gamma_k(t-\tau) f_2^k(\epsilon_u^k, T^k) \varepsilon_a^k(\tau) d\tau \right],$$

$$\sigma^k = 3K^k(T^k) (\epsilon^k - \alpha_{0k} \Delta T^k);$$

для заполнителя

$$\varphi_1(\sigma^{(3)}, T^{(3)}) s_{\alpha\beta}^{(3)} = 2G^{(3)} \left[ f^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)} - \int_0^t \Gamma_3(t-\tau) f^{(3)}(\epsilon_u^{(3)}) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(3)}(\sigma) d\tau \right];$$

$$\varphi_2(\sigma^{(3)}) \sigma^{(3)} = 3K^{(3)} (\epsilon^{(3)} - \alpha_{03} \Delta T^{(3)}).$$

Здесь  $k = 1, 2$  — номера внешнего и внутреннего несущих слоев,  $k = 3$  — номер заполнителя;  $s_{\alpha\beta}^k, \sigma^k, \varepsilon_{\alpha\beta}^k, \varepsilon^k$  — девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $G^k, K^k$  — параметры упругости материала;  $\varepsilon_u^k$  — интенсивность деформаций;  $f_1^k(\varepsilon_u^k, T_0^k)$  — функция пластичности, введенная А.А. Ильиушиным для упругопластических сред [4];  $f_2^k(\varepsilon_u^k, T^k)$  — функция нелинейной ползучести металлов;  $f^{(3)}(\varepsilon_u^{(3)}), \varphi_1(\sigma^{(3)}), \varphi_2(\sigma^{(3)})$  — универсальные функции, описывающие свойства физически нелинейного полимерного заполнителя;  $\Gamma_k(t)$  — ядро релаксации материала;  $\alpha_{0k}$  — температурный коэффициент линейного расширения материала;  $T^k(z, t)$  — температурное поле в  $k$ -м слое;  $\Delta T^k = T^k - T_0^k$ ;  $T_0^k$  — начальная температура. Индексы, обозначенные греческими буквами, принимают значения  $r, \varphi$ .

Принимаем следующий температурный режим пластинки. Тепловой поток плотностью  $q_t$  воспринимается внешней поверхностью слоя 1. В силу малой толщины последнего можно пренебречь потерями теплоты на его нагревание и считать его температуру равной температуре заполнителя в месте склейки:  $T^{(1)} \equiv T^{(3)}(c, t)$ . Вся теплота, воспринимаемая пластинкой за время  $t$ , идет на нагревание заполнителя, температура второго несущего слоя также принимается равной температуре заполнителя в месте склейки:  $T^{(2)} \equiv T^{(3)}(-ct)$ . Считая пластинку изолированной по контуру, температурное поле в заполнителе можно рассчитывать по формуле, приведенной в [5] для однослойной пластинки при тех же условиях:

$$T^{(3)}(z, t) = \frac{q_t h_3}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2h_3^2} (z+c)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \frac{\pi n}{h_3} (z+c) \right] \exp(-\pi^2 n^2 \tau) \right\}; \tau = at/h_3^2.$$

Внешняя распределенная по поверхности слоя 1 нагрузка предполагается осесимметричной:  $p = p(r, t)$ ,  $q = q(r, t)$  — ее проекции на оси  $r$  и  $z$  соответственно.

При достаточном термосиловом нагружении металл во внешнем поверхностном слое 1 может перейти в пластическое состояние. При мощном обдуве потоком газа это способствует его выветриванию (абляции). Подобный эффект наблюдается, например, при входе летательных аппаратов в атмосферу. Поэтому в рассматриваемой модели считаем толщину внешнего слоя убывающей во времени:  $h_1 = h_1(t)$ . Эта функциональная зависимость может быть определена экспериментально.

Уравнения равновесия, соотношения деформаций и перемещений остаются такими же по форме, как и в [1]. Решение задачи методом линейных последовательных приближений [1, 6], основанном на методе упругих решений [4], позволяет свести краевую задачу к системе линейных дифференциальных уравнений относительно искомым величин — прогиба пластинки  $w(r, t)$ , отно-

сительного сдвига и радиального перемещения поверхности приведения  $\psi(r, t)$  и  $u(r, t)$  в заполнителе

$$\begin{cases} L_2 (a_1 u^{(n)} + a_2 \psi^{(n)} - a_3 w_{,r}^{(n)}) = -p + p_{\omega}^{(n-1)} ; \\ L_2 (a_2 u^{(n)} + a_4 \psi^{(n)} - a_5 w_{,r}^{(n)}) = h_{\omega}^{(n-1)} ; \\ L_3 (a_3 u^{(n)} + a_5 \psi^{(n)} - a_6 w_{,r}^{(n)}) = -q + q_{\omega}^{(n-1)} , \end{cases} \quad (1)$$

рассматриваемой совместно с граничными условиями. Например, при заделке края пластины

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = w_{,r}^{(n)} = 0 \quad (r = 1),$$

а при шарнирном ее опирании

$$u^{(n)} = \psi^{(n)} = w^{(n)} = M_r^{(n)} = 0 \quad (r = 1).$$

Члены с индексом  $(n - 1)$  называются дополнительными "внешними" усилиями и служат поправками на физическую нелинейность и реономность материалов слоев. В первом приближении их можно положить равными нулю, в дальнейшем они вычисляются по результатам предыдущего приближения. Формулы для их расчета совпадают с соответствующими формулами в [1] с учетом поправки на некоторое различие в физических уравнениях состояния. Коэффициенты  $a_m$  ( $m = 1, \dots, 6$ ) определяются через параметры упругости и геометрии пластинки и поэтому, в конечном итоге, зависят от продолжительности действия термосиловой нагрузки:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^3 K_{k0}; \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}); \quad a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1}; \\ a_4 &= K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}); \quad a_5 = K_{32} + c(K_{11} - K_{21}); \\ a_6 &= \sum_{k=1}^3 K_{k2}; \quad K_{kn} = \int_{h_k} (K_k + 4/3G_k) z^n dz \quad (n = 0, 1, 2). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Перемещения, линейные координаты и толщины слоев отнесены к радиусу пластинки, нагрузка и параметры упругости — к интенсивности давления. Линейные дифференциальные операторы

$$L_2(u) \equiv [1/r \cdot (ru)_{,r}]_{,r}, \quad L_3(u) \equiv 1/r \cdot [r L_2(u)]_{,r}. \quad (3)$$

Запятая в нижнем индексе обозначает операцию частного дифференцирования по следующей за ней координате.

С учетом гладкости в начале координат решение системы (1) имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \psi^{(n)} = C_1^{(n)} I_1(\beta r) + \varphi_4^{(n)}; \quad u^{(n)} = a_3 [L_3^{-1}(q - q_{\omega}^{(n-1)}) - \\ - a_6 L_2^{-1}(p - p_{\omega}^{(n-1)})/a_3 + (a_5 a_3 - a_2 a_6) \psi^{(n)}/a_3 + \end{cases} \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 + C_2^{(n)} r ] / ( a_1 a_6 - a_3^2 ); \\
 w^{(n)} = \left\{ b_2 [ C_1^{(n)} I_0(\beta r) / \beta + \int \psi_4^{(n)} dr \right\} - \int [ a_3 L_2^{-1} ( p - p_\omega^{(n-1)} ) / a_1 - \\
 - L_3^{-1} ( q - q_\omega^{(n-1)} ) ] dr + C_3^{(n)} r^2 + C_4^{(n)} ] / b_3 ; \\
 b_1 = a_4 - a_2^2 / a_1 ; b_2 = a_5 - a_2 a_3 / a_1 ; b_3 = a_6 - a_3^2 / a_1 ,
 \end{array} \right.$$

где  $L_2^{-1}$ ,  $L_3^{-1}$  — интегральные операторы, обратные операторам (3);  $\psi_4^{(n)}$  — частное решение неоднородного модифицированного уравнения Бесселя, выделяемого из (1) для функции  $\psi^{(n)}$ ;  $C_1^{(n)}$ , ...,  $C_4^{(n)}$  — параметры интегрирования, формально совпадающие с приведенными в [1].

Численная реализация решения уравнений (4) проведена на ЭВМ ЕС 1022 при  $q = 3 \cdot 10^7$ ,  $p = 0$ , интенсивности теплового потока  $q_t = 5000$  Дж/(м<sup>2</sup>·с), продолжительности их воздействия  $t = 60$  мин. Относительная толщина слоев  $c = 0,1$ ,  $h_1 = 0,04 \rightarrow 0,02$ ,  $h_2 = 0,04$  подбиралась таким образом, чтобы нелинейные термомеханические и реономные свойства материалов проявились в достаточной степени. Унос вещества с поверхности несущего слоя  $h_1 \rightarrow h_1/2$  считался равномерным. Материал несущих слоев пластинки — сплав Д16Т, наполнитель — фторопласт.

Результаты показывают сходимость с достаточной для практики точностью метода линейных последовательных приближений для решения поставленной задачи: максимальное отличие результатов в 6-м приближении, которые приняты за искомое решение, от предыдущего — около 3%, а от 7-го — менее 0,5%. Число узлов по радиальной координате (21) определено из условия достижения необходимой точности решения. Счет квадратур (2) проводился с использованием формул Ньютона — Котеса. Интегрирование по толщине слоев выполнялось по четырехточечной формуле Ньютона. При  $\sigma > 0$  полагалось  $\omega_2(\sigma) \equiv 1$ . Максимальная погрешность численного удовлетворения уравнений равновесия не превышает 5%, граничные условия (заделка по контуру) выполняются практически точно.

В работах [1, 6] исследована необходимость учета свойств нелинейных и реономных материалов при расчетах слоистых элементов конструкций для случая изотермического нагружения, поэтому остановимся в основном на изучении влияния неоднородного и нестационарного температурного поля.

Изменение температуры по поперечному сечению пластинки в различные моменты времени показано на рис. 1. В процессе воздействия теплового потока во внешнем несущем слое температура повышается до 600 К, в слое 2 она остается постоянной.

Рис. 2 и 3 иллюстрируют влияние теплового потока и абляции на относительные сдвиги материала наполнителя и прогиб пластинки. За время  $t_1$  эти параметры без учета абляции более чем в два раза, а при уносе вещества с поверхности внешнего слоя почти в четыре раза превышают термоупругие в начальный момент времени. Различие конечных результатов при  $h_1 = 0,04 \rightarrow 0,02$ ,

$t = t_1$  и для пластинки постоянной толщины ( $h_1 = 0,02, t = t_1$ ) можно объяснить реономностью материалов.

Кривые на рис. 4 показывают изменение радиальных напряжений (которые являются большими по модулю) на внешних поверхностях несущих слоев и в заполнителе в месте склейки со слоем 1. В процессе температурного нагрева напряжения в несущих слоях становятся отрицательными, что обуславливает незначительное изменение напряженного состояния слоя 2. В то же время абляция приводит к существенному изменению условий работы этого слоя и значительному росту в нем напряжений.

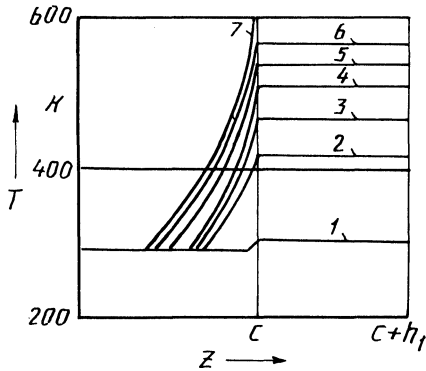


Рис. 1. Изменение температуры по поперечному сечению пластинки в различные моменты времени от начала термосилового воздействия:

1 —  $t = 0$ ; 2 — 10 мин; 3 — 20;  
4 — 30; 5 — 40; 6 — 50; 7 —  
60 мин

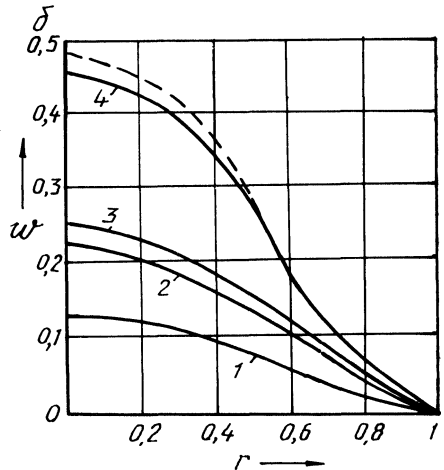
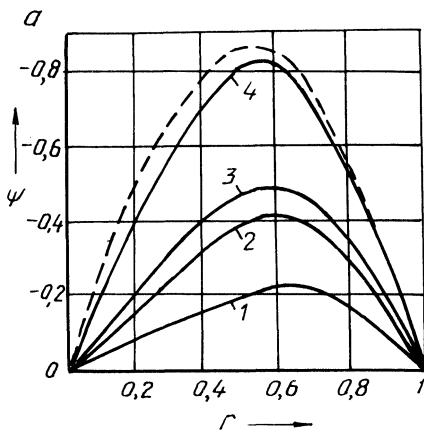


Рис. 2. Относительный сдвиг материала заполнителя (а) и прогиб пластинки (б) при ее термосиловом нагружении:

1 — термоупругость при  $t = 0$ ; 2, 3 — общий случай физических уравнений состояния при постоянной толщине слоя  $h_1 = 0,04$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t = t_1$ ; 4 — с учетом абляции за время  $t_1$  ( $h_1 = 0,04 \rightarrow 0,02$ ); пунктирная линия соответствует пластинке постоянной толщины  $h_1 = 0,02$  при  $t = t_1$

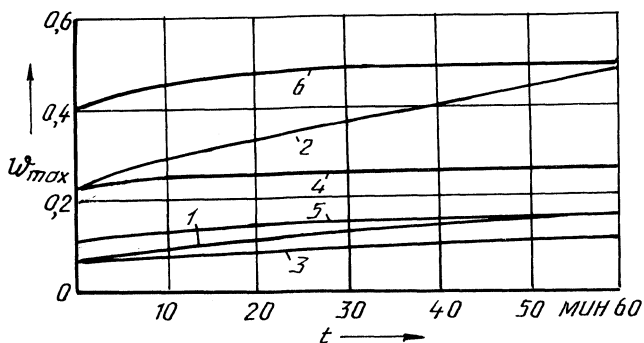


Рис. 3. Изменение максимального прогиба пластинки  $w_{max}$  во времени при наличии абляции и без нее:  
 1, 2 - ( $h_1 = 0,04 \rightarrow 0,02$ ); 3, 4 -  $h_1 = 0,04$ ; 5, 6 -  $h_1 = 0,02$  (линии с нечетным номером -  $t = 0$ , четным -  $t = t_1$ )

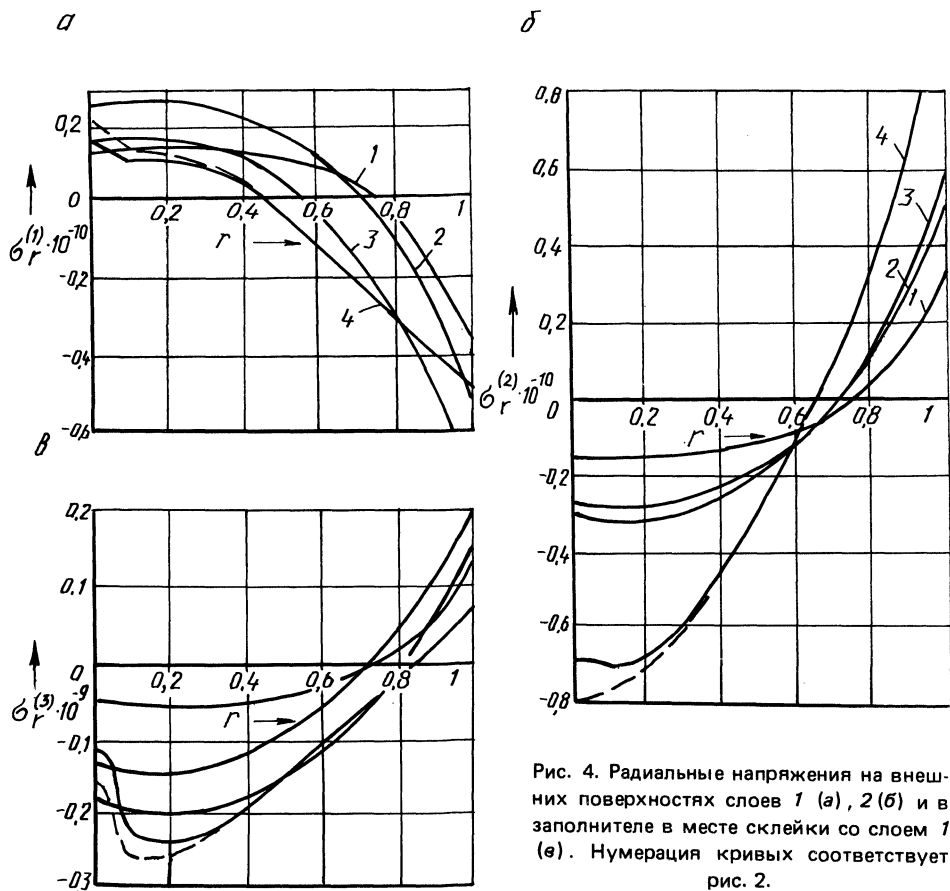


Рис. 4. Радиальные напряжения на внешних поверхностях слоев 1 (а), 2 (б) и в заполнителя в месте склейки со слоем 1 (в). Нумерация кривых соответствует рис. 2.

Таким образом, рассмотренная математическая модель позволяет учесть влияние термосилового нагружения, сопровождающегося абляцией, на напряженно-деформированное состояние трехслойных пластин из физически нелинейных и реономных материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И. К изгибу круглой трехслойной металлополимерной пластинки // Теорет. и прикл. механика. — Мн. — 1986. — Вып. 13. — С. 54—59. 2. Григोलюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. — М., 1973. — 170 с. 3. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов. — М., 1972. — 327 с. 4. Ильюшин А.А. Пластичность. — М., 1948. — 376 с. 5. Коваленко А.Д. Термоупругость. — Киев, 1975. — 216 с. 6. Москвитин В.В., Старовойтов Э.И. К исследованию напряженно-деформированного состояния двухслойных металлополимерных пластин при циклических нагружениях // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1986. — № 1. — С. 116—121.

УДК 539.3

В.В. КОРОЛЕВИЧ

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКА С ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ ДИАМЕТРА

Рассмотрим тонкий сплошной диск, вырезанный из ортогонально-армированной слоистой пластины, который вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, лежащей в срединной плоскости диска и совпадающей с его диаметром (рис. 1). Такое вращение диска происходит в расходомерах, предназначенных для измерения скоростей движения жидкостей, газов и их расхода.

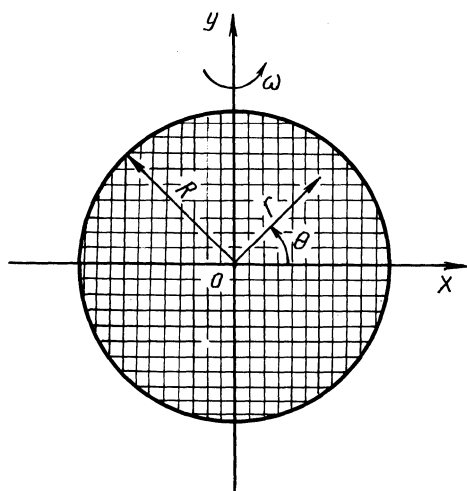


Рис. 1. К расчету диска с прямоугольной анизотропией, вращающегося вокруг диаметра