

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕСА С ШИНОЙ С УЧЕТОМ ПАРАМЕТРОВ ЕЕ КОНСТРУКЦИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ДИНАМИКЕ СИСТЕМ С КАЧЕНИЕМ

К анализу процесса качения колеса с деформируемой периферией (шиной) можно подходить по крайней мере с двух точек зрения. Первая из них выработалась в общей механике и динамике транспортных систем с качением. Она основывается на концепции, что колесо является нередко определяющим из множества других очень важных элементов в таких системах. При этом детали конструкции деформируемой периферии колеса не принимаются во внимание. Важны лишь внешние характеристики колеса, которые составляют базу теории качения. Основное внимание уделяется задачам динамики, устойчивости движения, управляемости, безопасности, надежности систем с качением.

Вторая точка зрения на колесо с шиной характерна для исследователей, работающих в области механики шин, которые изучают шину как отдельный и единственный объект с учетом по возможности всех деталей ее конкретной конструкции (геометрии, свойств резины, корда, расположения нитей последнего, числа слоев и т.д.). При этом решаются вопросы прочности, уменьшения износа, оптимальной эксплуатации и технологии шин. Рассматриваются обычно простые движения колеса с шиной под действием постоянных сил (статика и стационарное качение).

Из-за чрезвычайной сложности не разработаны общие расчетные методы определения всех параметров шины (даже параметров статической жесткости), основывающиеся на анализе шины как толстой оболочки, конструктивно анизотропной, неоднородной, с учетом больших деформаций, термовязкоупругопластических свойств, а также внутреннего трения. Причем это существенно в первую очередь в отношении задач, которыми занимаются исследователи в области механики шины. Очевидно, что в указанной области необходимо пользоваться сложными моделями шины, как можно более точно отражающими особенности реальной конструкции (см., например, [1]). Следует отметить, что даже в области механики шины из-за трудностей расчета широко применяются простые модели шины в виде балки или нити на упругом основании или даже модель, которую принято называть "щетка".

При исследовании динамических явлений в общей механике и динамике колесных систем важны в первую очередь уравнения теории качения и конкретные значения констант, а шину можно рассматривать как "черный ящик" с известной взаимосвязью между входными и выходными динамическими характеристиками. Поэтому здесь разумно использовать простые модели, описывающие процесс качения деформируемого колеса, применение которых в динамике в отличие от квазистатики уже сопряжено со значительными трудностями.

Эффективное использование простых моделей в динамике систем с качением для определения параметров колеса с шиной и констант теории качения основывается на подходе, описанном, например, в работе [2], где, учитывая приближенность модели, все ее параметры рассматриваются как некоторые приведенные величины, определяемые по экспериментальным базовым пара-

метрам конкретной шины. Однако нередко не все базовые параметры шины известны, а в динамике систем с качением за неимением полной информации требуется оценить их хотя бы приближенно. В данной работе рассматривается некоторая модельная пневматическая шина с присущими ей параметрами конструкции, являющаяся приближенной моделью радиальной шины. Это позволяет установить соответствие между конструкцией модельной шины и параметрами элементов обычно рассматриваемой модели колеса в форме пружин и нитей, вычислить жесткости этих элементов, а по ним — базовые параметры шины и константы теории качения. При этом в отличие от работы [4] учитываются жесткости не только в боковом, но и в тангенциальном направлении каркаса шины.

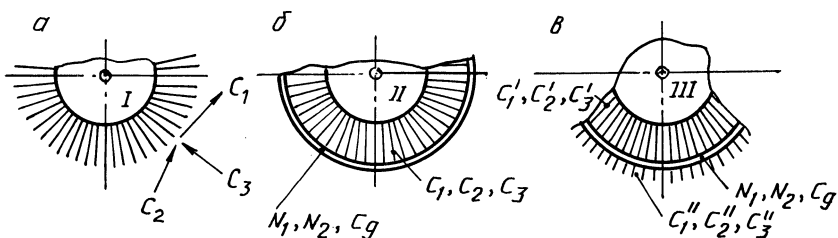


Рис. 1. Модели деформируемого колеса:

а — модель "щетка"; б — модель, включающая нить; в — модель, включающая нить и элементы, имитирующие протектор

На рис. 1, а показана модель I ("щетка") в виде набора радиальных элементов (стержней или пружин), жестко заделанных в абсолютно твердый диск и имеющих жесткости на единицу длины периферии в тангенциальном направлении — c_1 , в боковом — c_2 и радиальном — c_3 . Более сложная модель II (рис. 1, б) включает круговую нить, связывающую концы набора радиальных упругих элементов. Нить имеет жесткость на растяжение N_1 , предварительное натяжение N_2 и жесткость на сдвиг в боковом направлении C_g . Таким образом, жесткостные свойства периферии в этом случае характеризуются параметрами $c_1, c_2, c_3, N_1, N_2, C_g$. Еще более усложненная модель III, представленная на рис. 1, в, содержит радиальные элементы, имитирующие протектор, с жесткостями в указанных выше направлениях c''_1, c''_2, c''_3 , а также радиальные элементы, имитирующие каркас, с жесткостями c'_1, c'_2, c'_3 и круговую нить, имитирующую брекер, с параметрами N_1, C_g, N_2 . Ширина шины $2b$ определяется шириной набора секций периферии рассмотренных типов, объединенных на общем диске с валом, причем свойства периферии в каждой секции могут изменяться по ширине. Простейшая модель является двухсекционной с расстоянием между секциями $2b$ и радиусом R , равным свободному радиусу шины.

Рассмотрим радиальную секцию модельной пневматической шины, расположенную в меридиональном сечении (в отличие от секций периферии, перпендикулярных к валу колеса), толщиной, равной единице длины периферии в окружном направлении (рис. 2). Секция состоит из двух нитей $A_1 A_3$

и A_2A_4 , имитирующих боковые стенки каркаса шины и в точках A_1 и A_2 закрепленных на цилиндрической поверхности диска колеса, а в точках A_3 и A_4 — на нерастяжимом жестком стержне A_3A_4 . Причем $|A_1A_2| = |A_3A_4| = C$ (где C — приведенный раствор бортов шины, определяемый с учетом формы бортовых закраин обода). Стержень A_3A_4 секции прикреплен к круговой нити B , имитирующей брекер, с которым связан упругий слой, имитирующий протектор Π . Приведенные высоту профиля обозначим h , ширину B , высоту слоя протектора и его ширину соответственно h_p и B_p (причем h может быть порядка половины высоты профиля конкретной шины, поскольку при расчете необходимо отбросить высоту бортов и протектора и примыкающих к ним жестких участков боковых стенок шин). Жесткость нитей A_1A_3 и A_2A_4 , равная c_s , также определяется из расчета на единицу длины периферии.

Ясно, что в точках A_3 и A_4 нити радиального сечения могут быть непосредственно закреплены на брекерном поясе. Однако стержень A_3A_4 введен специально, чтобы отделить радиальную секцию, имитирующую каркас шины и представленную радиальным элементом с жесткостями c'_1, c'_2, c'_3 (рис. 1, в).

Под действием внутреннего давления в шине p нити принимают форму дуги окружности с радиусом r и центральным углом 2γ . Усилие натяжения каждой нити равно T_s . Руководствуясь рис. 2 и известной формулой для расчета натяжения нити, находящейся под постоянным давлением p , получаем:

$$h = 2r \sin \gamma; \quad (1)$$

$$T_s = pr; \quad (2)$$

$$2\gamma r = u_* + T_s / c_s, \quad (3)$$

где u_* — первоначальная длина нити A_1A_3 .

На единицу длины круговой нити действует радиальная сила

$$Q_b = pC - 2T_s \cos \gamma. \quad (4)$$

Натяжение круговой нити N_2 связано с радиусом нити R_b равенством

$$N_2 = Q_b R_b = (pC - 2T_s \cos \gamma) R_b. \quad (5)$$

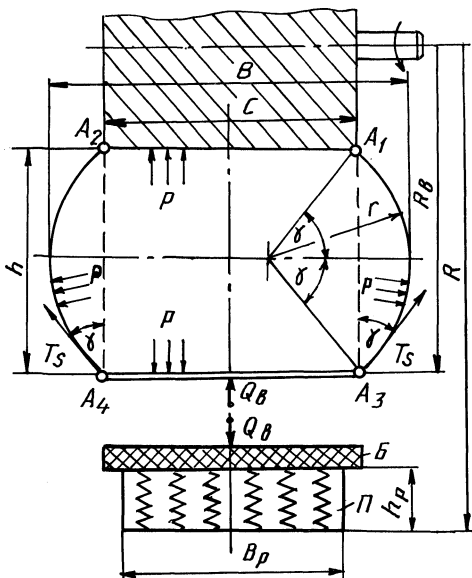


Рис. 2. Модель радиальной секции колеса с шиной

Для свободной надутой шины приведенные ширина и высота профиля соответственно равны B_0 и h_0 . Помечая все остальные величины для свободной нити дополнительным индексом "0", находим из формул (1)–(5):

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= 2 \operatorname{arctg} [(B_0 - C)/h_0]; \quad r_0 = h_0 / (2 \sin \gamma_0); \\ T_{s0} &= p r_0; \quad N_{20} = (pC - 2T_{s0} \cos \gamma_0) R_{b0}; \\ R_{b0} &= (1 + N_{20}/N_1) R_{b*}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где R_{b*} — радиус окружной нити ненадутой шины. Значение c_s находится расчетным путем по числу нитей корда, приходящихся на единицу длины периферии, а N_1, C_g зависят от числа нитей, проходящих через сечение брекера, угла их наклона, жесткости и механических характеристик резины.

Задаваясь h , из выражений (1)–(4) можно найти значение и распределение усилий Q_b , действующих со стороны круговой нити на радиальную секцию, принимая во внимание не только малые, но и большие деформации. В случае малых деформаций радиальная жесткость $c'_3 = -\partial Q_b / \partial h$ находится из выражений (1)–(4):

$$c'_3 = \frac{p}{\cos \gamma_0} \left\{ \frac{1}{\sin \gamma_0 + \cos \gamma_0 [p / (2c_s) - \gamma_0]} - \sin \gamma_0 \right\}, \quad (7)$$

если за базовое принять состояние надутой свободной шины. При этом можно приближенно полагать, что $N_2 = N_{20} = \text{const}$.

Боковая жесткость радиальной секции c'_2 находится из следующих простых соображений. Известно, что если натяжение математического маятника равно T , а его длина — h , то для смещения материальной точки на малую величину y по горизонтали из положения равновесия необходимо приложить боковую горизонтальную силу $F = Ty/h$, откуда $c'_2 = T/h$. В нашем случае вместо T следует подставить суммарную вертикальную составляющую $2T_s \cos \gamma$ усилий натяжения стенок в меридиональном направлении с учетом равенств (1) и (2). В результате находим

$$c'_2 = p \operatorname{ctg} \gamma_0. \quad (8)$$

Тангенциальная жесткость радиальной секции

$$c'_1 = p \operatorname{ctg} \gamma_0 + \delta G / (r_0 \gamma_0), \quad (9)$$

где δ — толщина стенки каркаса; G — модуль сдвига материала боковой стенки каркаса; $2r_0 \gamma_0$ — длина нити $A_1 A_3$ свободной шины.

Первое слагаемое в выражении (9) получается таким же образом, как и зависимость (8), второе — в результате учета сдвига элементов каркаса высотой, равной длине боковой стенки по меридиану, и толщиной 2δ .

Жесткости упругого слоя, имитирующего протектор,

$$c''_3 = B_p E_p / h_p; \quad c''_1 = c''_2 = B_p G_p / h_p, \quad (10)$$

где B_p, h_p – соответственно приведенная ширина и высота упругого слоя;
 E_p, G_p – приведенные модули упругости материала слоя на растяжение и
сдвиг.

Введем следующую систему обозначений, принимая во внимание, что параметр, связанный с жесткостью, приходящейся на единицу длины периферии, имеет в обозначении первый индекс, соответствующий направлению (1 – тангенциальному, 2 – боковому, 3 – радиальному). Второй индекс принимает значения 1 или 2, если речь идет о параметрах элемента модели, помеченных одним или двумя штрихами (см. рис. 1, в). Безразмерные величины имеют в качестве последнего индекса "0". Итак:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= \sqrt{c'_1 / N_1}; \tau_{12} = \sqrt{c''_1 / N_1}; \tau_1 = \sqrt{(c'_1 + c''_1) / N_1}; \\ \tau_{110} &= 2a\tau_{11}; \tau_{120} = 2a\tau_{12}; \tau_{10} = 2a\tau_1; s_{10} = c''_1 / c'_1; \\ \tau_{21} &= \sqrt{c'_2 / N_{2g}}; \tau_{22} = \sqrt{c''_2 / N_{2g}}; \tau_2 = \sqrt{(c'_2 + c''_2) / N_{2g}}; \\ \tau_{210} &= 2a\tau_{21}; \tau_{220} = 2a\tau_{22}; \tau_{20} = 2a\tau_2; s_{20} = c''_2 / c'_2; \\ \tau_{31} &= \sqrt{c'_3 / N_2}; \tau_{32} = \sqrt{c''_3 / N_2}; \tau_3 = \sqrt{(c'_3 + c''_3) / N_2}; \\ \tau_{310} &= 2a\tau_{31}; \tau_{320} = 2a\tau_{32}; \tau_{30} = 2a\tau_3; s_{30} = c''_3 / c'_3. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь длина области контакта обозначена $2a, N_{2g} = N_2 + C_g$, причем предполагается, что $a/R \ll 1$, а C_g пропорционально приведенному модулю сдвига материала брекера и площади сечения последнего.

Из [3] с учетом принятых в данной работе обозначений получим выражения для боковой жесткости c_y и коэффициента сопротивления уводу (бокового псевдоскольжения) k_y :

$$c_y = 2ac'_2 \frac{\tau_{220}^2}{\tau_{20}^2} \left[1 - \frac{2\tau_{220}^2}{\tau_{20}^2 \tau_{210}} \frac{-D_4(\tau_{20}) + D_4(-\tau_{20})}{D_1(\tau_{20}) - D_1(-\tau_{20})} \right], \quad (12)$$

$$k_y = 2a^2 c'_2 \frac{\tau_{220}^2}{\tau_{20}^2} \left[1 + \frac{2\tau_{220}^2}{\tau_{20}^2 \tau_{210}} \frac{D_2(-\tau_{20}) D_3(\tau_{20}) + D_2(\tau_{20}) D_3(-\tau_{20})}{D_1(\tau_{20}) + D_1(-\tau_{20})} \right], \quad (13)$$

где

$$D_1(\tau_{20}) = (1 + \tau_{210} / \tau_{20}) [D_4(\tau_{20}) + 1],$$

$$D_2(\tau_{20}) = D_4(\tau_{20}) + 1 + (1 - \tau_{210} / \tau_{20}) (1 + 2/\tau_{210}) \tau_{20},$$

$$D_3(\tau_{20}) = 1 + [1 - \exp(\tau_{20})] / \tau_{20},$$

$$D_4(\tau_{20}) = (1 + \tau_{210} / \tau_{20}) \exp(\tau_{20}) - \tau_{210} / \tau_{20}.$$

Для случая движения центра колеса по окружности радиуса ρ в результате интегрирования уравнений (2) и (3) в работе [3] с учетом того, что боковые деформации в области контакта $\lambda(\xi) = \lambda(0) + \xi(2a - \xi)/(2\rho)$, получаем выражение для боковой силы

$$Q = \mu_2/\rho, \mu_2 = 8a^3 c'_2 \frac{s_{20}}{\tau_{20}^2} \left[\tau_{210}^2/12 - \frac{\tau_{220}^2}{\tau_{20}^2} (1 + 2/\tau_{210}) \frac{1 + \tau_{20}/2 + (\tau_{20}/2 - 1) \exp(\tau_{20})}{1 - \tau_{20}/\tau_{210} - (1 + \tau_{20}/\tau_{210}) \exp(\tau_{20})} \right]. \quad (14)$$

По зависимостям (12) – (14) можно вычислить кинематические коэффициенты в теории М.В. Келдыша, которые здесь обозначим s_4 и s_5 . Действительно, согласно этой теории $Q = c_y \sigma_2$ (где σ_2 – приведенная боковая деформация в центре области контакта). В силу равенства (14) при круговом движении колеса находим $c_y \sigma_2 = \mu_2/\rho$. В результате получаем $1/\rho = \sigma_2 c_y/\mu_2$, что дает

$$s_4 = c_y/\mu_2, s_5 = k_y/\mu_2. \quad (15)$$

Последнее выражение для s_5 следует из известного соотношения $s_5 = s_4 k_y/c_y$.

В связи с аналогией между зависимостями для продольной и боковой сил из выражений (12) – (14) вытекают аналогичные формулы для продольной жесткости c_x , коэффициента продольного псевдоскольжения (буксования) k_x и μ_1 , если всюду заменить первый индекс "2" на "1" (т.е. τ_{20} на τ_{10} , τ_{210} на τ_{110} и т.д.). Из выражений (15) следуют формулы для кинематических коэффициентов s_1 и s_2 в теории [2], обобщающей теорию М.В. Келдыша на случай качения колеса под действием сил в его срединной плоскости:

$$s_1 = c_x/\mu_1, s_2 = k_x/\mu_1. \quad (16)$$

Заметим, что и длина области контакта $2a$ при заданной нагрузке P_{30} находится из формулы, аналогичной (14), если всюду первый индекс "2" заменить на "3", а ρ – на свободный радиус шины R :

$$P_{30} = 8a^3 c'_3 \frac{s_{30}}{R \tau_{30}^2} \left\{ \frac{\tau_{310}^2}{12} - \frac{\tau_{320}^2}{\tau_{30}^2} \left(1 + \frac{2}{\tau_{310}} \right) \times \frac{1 + \tau_{30}/2 + (\tau_{30}/2 - 1) \exp(\tau_{30})}{1 - \tau_{30}/\tau_{310} - (1 + \tau_{30}/\tau_{310}) \exp(\tau_{30})} \right\}. \quad (17)$$

Решение этого нелинейного уравнения не вызывает затруднений и осуществляется с применением численных методов.

Статический радиус вычисляется по формулам:

$$z_c = R - \lambda_c,$$

$$\lambda_c = \frac{a^2}{2R} \left\{ 1 - 8s_{30} \left[\frac{1}{\tau_{30}^2} + \frac{1 + \tau_{310}/2}{\tau_{30} \tau_{310}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1 + \exp(\tau_{30})}{1 - \tau_{30}/\tau_{310} - (1 + \tau_{30}/\tau_{310}) \exp(\tau_{30})} \right] \right\}. \quad (18)$$

Нормальная жесткость равна

$$c_z = \partial P_{30} / \partial \lambda_c = \frac{\partial P_{30}}{\partial a} / \frac{\partial \lambda_c}{\partial a} \quad (19)$$

и определяется по формуле (12), если заменить в ней $c'_2, \tau_{210}, \tau_{220}, \tau_{20}$ на $c'_3, \tau_{310}, \tau_{320}, \tau_{30}$.

Угловая жесткость c_θ складывается из двух составляющих. Первая c_θ связана с распределенными боковыми деформациями при повороте некатящегося колеса вокруг вертикальной оси на угол θ , вторая $c_{\theta b}$ — с продольными:

$$c_\theta = c_\theta + c_{\theta b}; \\ c_\theta = \frac{2}{3} a^3 c'_2 s_{20} \left[\frac{\tau_{210}^2}{\tau_{20}^2} + 24 \frac{\tau_{220}^2}{\tau_{20}^5} \left(1 + \frac{\tau_{210}}{2} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(\tau_{20}/2 + 1) \exp(-\tau_{20}) + \tau_{20}/2 - 1}{(1 - \tau_{210}/\tau_{20}) \exp(-\tau_{20}) + \tau_{210}/\tau_{20} + 1} \right], \quad (20)$$

где $c_{\theta b} = c_x b^2, 2b = B_t$ — приведенная ширина шины.

В случае простейшей модели колеса (см. рис. 1, а) в результате несложных вычислений находим $c_\theta = 4/3 \cdot (b_p a^3 G_p / h_p), c_{\theta b} = 4/3 \cdot (ab_p^3 G_p / h_p) = b^2 c_x, 2b_p = B_p$, так как $c_x = 4ab_p G_p / h_p$. В этом случае $b = b_p / \sqrt{3}$.

Приведем пример расчета при следующих параметрах конструкции шины: $R = 29$ см, $h = 8$ см, $C = 12,5$ см, $B = 16,5$ см, $B_p = 10$ см, $B_t = 12,5$ см, $h_p = 1,5$ см, $b_s = 0,4$ см, $N_1 = 150$ кН, $C_g = 4$ кН, $c_s = 2$ кН/см², $E_p = 0,36$ кН/см², $G = 0,12$ кН/см², $\rho = 0,02$ кН/см², $P_{30} = 4$ кН. В результате с использованием ЭВМ по формулам (1)–(20) найдены значения параметров модели III (см. рис. 1) $c'_1, c''_1, c'_2, c''_2, c'_3, c''_3, N_2$, а по ним и ряд констант теории качения: $c_x = 3,12$ кН/см, $k_x = 80,4$ кН, $s_1 = 0,014$ см⁻², $s_2 = 0,361$ см⁻¹, $c_y = 0,8$ кН/см, $k_y = 21,3$ кН/рад, $s_4 = 0,0092$ см⁻², $s_5 = 0,245$ см⁻¹, $c_\theta = 209$ кН·см/рад, $z_{c0} = 26,9$ см, $c_z = 2,56$ кН/см, $2a = 15,5$ см.

В заключение укажем, что величина E_p может рассматриваться как приведенная, причем $E_p \leq 3G$ хотя бы потому, что беговая дорожка шины имеет

кривизну в меридиональном направлении. Если отношения $s_{10} = c_1''/c_1', s_{20} = c_2''/c_2', s_{30} = c_3''/c_3'$ очень велики, для вычисления констант теории качения можно использовать зависимости (1) ... (6), (14), приведенные в работе [2] и соответствующие модели II (см. рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В.Л., Левковская Э.Я. Расчет напряжений и деформаций, вызываемых давлением в шинах типа P // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. — 1969. — № 3. — С. 107–112.
2. Левин М.А. Определение констант теории качения на основе модельного подхода и базовых параметров деформируемого колеса // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1987. — Вып. 14. — С3–10.
3. Левин М.А. Исследование нестационарного увода шины с учетом жесткости протектора // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук. — 1973. — № 4. — С. 112–118.
4. Clark S. Mechanics of pneumatic tires. — Washington, 1971. — P. 698.

УДК 531.19

В.С. ВИХРЕНКО, Г.В. КОМАРОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ СРЕДНИХ СИЛ В МЕТОДЕ УСЛОВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ НА ОСНОВЕ КУМУЛЯНТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Разработка эффективных подходов к решению системы интегральных уравнений [1]

$$e^{-\beta\varphi_{ij}(\vec{q}_i)} = \frac{\int_{V_j} e^{-\beta[\Phi_{ij}(|\vec{q}_i - \vec{q}_j + \vec{R}_{ij}|) - \varphi_{ij}(\vec{q}_j)] - \beta\varphi_j(\vec{q}_j)} d\vec{q}_j}{\int_{V_j} e^{-\beta\varphi_j(\vec{q}_j)} d\vec{q}_j} \quad (1)$$

относительно потенциалов средних сил $\varphi_{ij}(\vec{q}_i)$ имеет важное значение как для получения данных в широкой области изменения термодинамических параметров системы, так и для изучения соответствия рассматриваемого метода другим теориям, в частности динамической теории кристаллической решетки. В системе уравнений (1) $\beta = (k_B T)^{-1}$ — обратная температура; V_j — объемы ячеек, на которые разбит весь объем системы; q_j — координата частицы, находящейся в j -й ячейке ($\vec{q}_j \in V_j$), отсчитываемая от центра ячейки; Φ_{ij} — парный межчастичный потенциал; R_{ij} — радиус-вектор, соединяющий центры i -й и j -й ячеек.

Рассматривая кристаллическое состояние вещества, когда движение частиц ограничено окрестностями узлов кристаллической решетки, представим потенциал межчастичного взаимодействия в виде ряда