

$$+ k [K'_m(kR_0) I_m(kR) - I'_m(kR_0) K_m(kR)] \alpha_m^{02} + \\ + [K_m(kR_0) I_m(kR) - I_m(kR_0) K_m(kR)] \beta_m^{02} \};$$

$$\Delta W(P) = \frac{R_0}{4\pi} \sum_m e^{im\varphi_0} \left\{ k \frac{\pi}{2} [Y'_m(kR_0) J_m(kR) - \right. \\ - J'_m(kR_0) Y_m(kR)] \alpha_m^{01} - \frac{\pi}{2} [Y_m(kR_0) J_m(kR) - \\ - J_n(kR_0) Y_m(kR)] \beta_m^{01} - k [K'_m(kR_0) I_m(kR) - \\ \left. - I'_m(kR_0) K_m(kR)] \alpha_m^{02} - [K_m(kR_0) I_m(kR) - I_m(kR_0) K_m(kR)] \beta_m^{02} \right\}.$$

где постоянные α_m^{js} , β_m^{js} , $j = 0, 1$, $s = 1, 2$ определяются из (16) и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романчик В.С., Кхиём Н.Т. Метод граничных интегральных уравнений в решении задачи колебаний вязкоупругих пластин при случайных воздействиях // Докл. АН БССР. — 1986. — Т. 30, № 11. — С. 965–968.
2. Кхиём Н.Т., Романчик В.С. Метод граничных интегральных уравнений в динамических задачах теории упругости при случайных воздействиях // Шестой Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннотации докл. — Ташкент, 1986. — С. 405.
3. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. — М., 1963. — 472 с.
4. Корнеев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. — М., 1971. — 288 с.
5. Вибрации в технике / Под ред. В.В. Болотина. — М., 1978. — Т. 1. — 352 с.

УДК 539.3

А.А. ДАШКЕВИЧ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ БАЛКИ НА НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СТЕПЕННОГО ТИПА

Рассматривается задача изгиба балки под действием нормальной нагрузки на неоднородном основании, модуль упругости которого меняется по степенному закону. Предполагается, что балка деформируется по толщине под действием внешней нагрузки и реакции отпора основания.

Пусть балка длиной $2a$ и шириной $2b$ ($a \gg b$) изгибается на неоднородном полупространстве, модуль упругости которого изменяется по закону $E = E_\mu z^\mu$ ($0 \leq \mu < 1$) под действием нормальной нагрузки $q(x)$. Тогда нормальное перемещение $w_0(x, y)$ определяется формулой [1]

$$w_0(x, y) = \iint_s K_0(x - \xi, y - \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1)$$

Согласно [2], находим реактивное давление под подошвой балки $p(x, y)$:

$$p(x, y) = p(x) g(y);$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & (\text{случай а}), \\ \frac{1}{\pi\sqrt{b^2 - y^2}} & (\text{случай б}). \end{cases}$$

Тогда (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b K_0(x - \xi, y - \eta) p(\xi) g(\eta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-a}^a \left\{ \int_{-b}^b K_0(x - \xi, y - \eta) g(\eta) d\eta \right\} p(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Положим

$$\tilde{K}_0 = \int_{-b}^b K_0(x - \xi, y - \eta) g(\eta) d\eta.$$

На осевой линии балки (при $y = 0$)

$$\text{а) } \tilde{K}_0(x, \xi) = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b K_0(x - \xi, \eta) d\eta;$$

$$\text{б) } \tilde{K}_0(x, \xi) = \int_{-b}^b K_0(x - \xi, \eta) \frac{1}{\pi\sqrt{b^2 - \eta^2}} d\eta.$$

Как и в [3], уравнение для определения $p(x)$ получим из условия равенства нормальных перемещений полупространства и балки по осевой линии. С учетом деформируемости балки по толщине оно имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 p(t) \tilde{K}_0(x, t) dt + \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{2E(1 - \nu)} \left[\frac{p(x)}{\epsilon} + \frac{q(x)}{2b} \right] = \\ = \frac{a^4}{12D} \int_{-1}^1 |x - t|^3 \left[\frac{q(t)}{2b} - \frac{p(t)}{\epsilon} \right] dt + C_0 + C_1 x. \end{aligned}$$

На основании [3] \tilde{K}_0 можно представить в таком виде:

$$\text{а) } \tilde{K}_0(x, t) = \frac{Q_1 a}{2^{1-\mu} \pi b^\mu} \int_{-1}^1 \frac{du}{\left[\left(\frac{x-t}{\delta} \right)^2 + u^2 \right]^{\frac{1+\mu}{2}}}; \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots$$

$$б) \tilde{K}_0(x, t) = \frac{Q_1 a}{2^{1-\mu} \pi^2 b^{1+\mu}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\left[\left(\frac{x-t}{\delta} \right)^2 + \sin^2 u \right]^{\frac{1+\mu}{2}}} \quad ; \quad (2)$$

Здесь

$$Q_1 = \frac{(1-\nu_0^2) C_\mu^* \gamma \sin \frac{\pi\gamma}{2} \Gamma\left(\frac{1+\mu}{2}\right) \pi}{E_\mu (1+\mu) \Gamma\left(\frac{1-\mu}{2}\right) \Gamma(\mu+1) \cos \frac{\pi\mu}{2}} ; \quad \delta = \frac{b}{a} ;$$

$$\pi \Gamma(2+\mu) C_\mu^* = 2^{\mu+1} \Gamma\left[1 + \frac{1}{2}(1+\mu-\gamma)\right] \Gamma\left[1 + \frac{1}{2}(1+\mu+\gamma)\right];$$

$$\frac{\gamma^2}{1+\mu} = 1 - \frac{\nu_0 \mu}{1-\nu_0} .$$

Перепишем (2) в таком виде:

$$ap(x) + \int_{-1}^1 K(x, t) p(t) dt = f(x), \quad (3)$$

где

$$K(x, t) = \beta \tilde{K}_0(x, t) + \gamma_1 |x-t|^3; \quad a = \frac{h}{a};$$

$$f(x) = C_0 + C_1 x - \alpha_1 q(x) + \gamma \int_{-1}^1 |x-t|^3 q(t) dt ,$$

$$а) \gamma = \frac{a^3 (1-\nu)^2}{4h^3 (1-2\nu) (1+\nu)}; \quad \beta = Q_1 \frac{2bE (1-\nu)}{(1+\nu) (1-2\nu) a} ;$$

$$\alpha_1 = \alpha; \quad \gamma_1 = \gamma;$$

$$б) \gamma_1 = \frac{a^3 (1-\nu)^2}{4h^3 (1+\nu) (1-2\nu)}; \quad \beta = Q_1 \frac{2b\pi E (1-\nu)}{(1+\nu) (1-2\nu) a} ;$$

$$\alpha_1 = \frac{h}{2a}; \quad \gamma_1 = \frac{\pi}{2} \gamma .$$

В случае $\mu = 0$ уравнение (3) описывает задачу изгиба балки на упругом основании, решенную в [3].

Уравнение (3) можно рассматривать как регуляризующее для задачи изгиба балки в классической постановке (т.е. без учета деформируемости ее по толщине), которое соответствует случаю $\alpha = 0$.

Решение уравнения (3) ищем в виде

$$p(x) = \sum_{k=1}^N d_k \varphi_k(x),$$

где

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h} & \text{при } x_{k-1} \leq x \leq x_k \\ \frac{x_{k+1} - x}{h} & \text{при } x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ 0 & \text{при } x > x_{k+1}, x < x_{k-1} \end{cases}$$

Для определения произвольных постоянных C_0 и C_1 к системе алгебраических уравнений (3) добавляем граничные условия, характеризующие свободное опирание балки:

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \int_{-1}^1 q(x) dx,$$

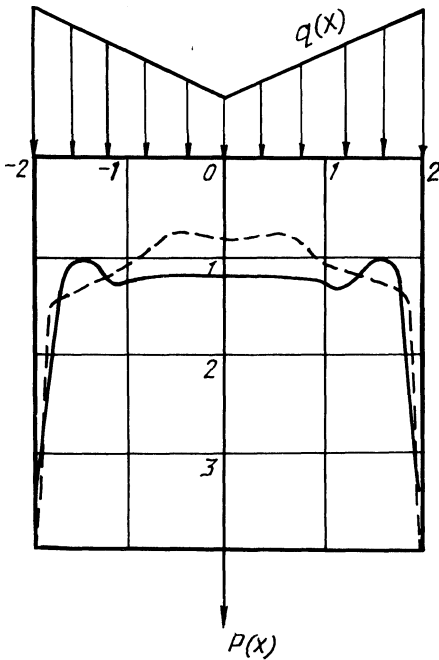


Рис. 1. Реактивное давление при $q(x) = 1 + |x|$, $\nu \approx 0,4$ (сплошные линии с учетом смятия балки при $E/E_0 = 1$, пунктирные — без учета смятия)

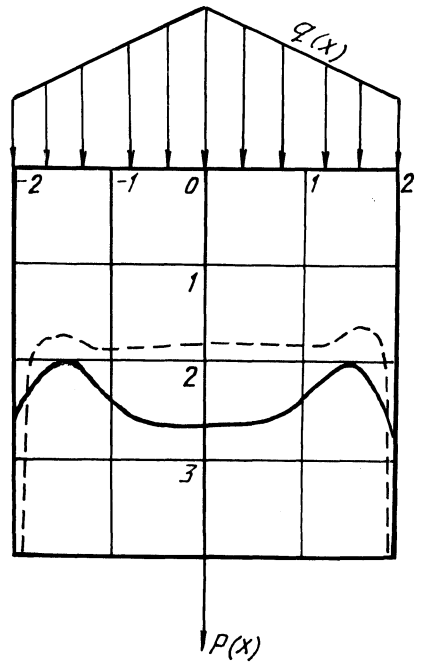


Рис. 2. Реактивное давление при $q(x) = 3 - |x|$, $\nu = 0,1$ (сплошные линии — с учетом смятия балки при $E/E_0 = 1$, пунктирные — без учета смятия)

$$\int_{-1}^1 xp(x) dx = \int_{-1}^1 xq(x) dx.$$

Для численной реализации интегрального уравнения (3) разработан комплекс программ расчета реактивного давления, основанный на аппроксимации искомого давления.

На рис. 1, 2 представлены графики расчета реактивных давлений при разных нормальных нагрузках $q(x)$ (на рис. 1: $q(x) = 1 + |x|$, $\nu = 0,4$; на рис. 2: $q(x) = 3 - |x|$, $\nu = 0,1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. П о п о в Г.Я. Математические проблемы контактных задач. — Одесса, 1976. — 115 с.
2. К у з н е ц о в В.И. Упругое основание. — М., 1952. — 296 с.
3. М а р т ы н е н к о М.Д., С в и р с к и й Е.А. Исследование изгиба балки на упругом основании в одной уточненной постановке // Гидроаэромеханика и теория упругости. — 1983. — № 3. — С. 76–80.

УДК 539.3

И.А. ПАЛЬЦЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ СЖАТИЯ ПЛИТ ПО ТОЛЩИНЕ С УЧЕТОМ СДВИГОВЫХ УСИЛИЙ

Наиболее простой и широко применяемой для решения граничных задач теории упругости является теория С.П. Тимошенко, достаточно полное развитие которой дано в [1]. Ниже, на основе результатов [1], выводится формула для расчета сближения (смятия) лицевых (граничных) плоскостей плиты под действием приложенных к ним нормальной и сдвигающей нагрузок.

Предположим, что к поверхностям прямоугольной плиты $z = \pm h$ приложены касательные $q_i = \bar{q}_i(x, y)$, $p_i = \bar{p}_i(x, y)$, $i = 1, 2$ и нормальные $q_3 = \bar{q}_3(x, y)$, $p_3 = \bar{p}_3(x, y)$ поверхностные нагрузки. Запишем условия на ограничивающих плоскостях плиты:

$$\sigma_z = \begin{cases} p_3 & \text{при } z = h, \\ q_3 & \text{при } z = -h, \end{cases} \quad \tau_{xz} = \begin{cases} p_1 & \text{при } z = h, \\ q_1 & \text{при } z = -h; \end{cases}$$

$$\tau_{yz} = \begin{cases} p_2 & \text{при } z = h, \\ q_2 & \text{при } z = -h. \end{cases}$$

Примем, как и в [1], что напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} изменяются по толщине пластины по линейному закону: