$$+ \frac{4\gamma h \cos\gamma h \ \mathrm{sh}\gamma x}{\mathrm{ch} 2\gamma x - \cos 2\gamma h}\Big] f(t);$$

$$v = \frac{P_0}{4\pi\mu}\Big(\frac{\kappa+1}{2} \ln \frac{\mathrm{ch}\gamma x + \cos\gamma h}{\mathrm{ch}\gamma x - \cos\gamma h} + \frac{\kappa-1}{2} \ln \frac{\mathrm{ch}\beta x + \cos\alpha}{\mathrm{ch}\beta x - \cos\alpha} +$$

$$+ \frac{4\gamma h \sin\gamma h \ \mathrm{ch}\gamma x}{\mathrm{ch} 2\gamma x - \cos 2\gamma h}\Big) f(t),$$

где P_0 — проекция силы на ось y, $\alpha = \beta\ (2H - h)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич Ю.В., Прусов В.И. Об одном представлении общих формул упругих колебаний однородной изотропной полосы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.– 1986. – № 2. – С. 101–105. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 707 с.

УДК 539.3

В.С. РОМАНЧИК, НГУЕН ТИЕН КХИЕМ

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследование собственных колебаний упругих пластин с отверстиями представляет собой трудную задачу, решение которой, как правило, требует использования численных методов. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) может быть эффективно применен для решения задач о колебаниях пластин со сложной границей. В данной работе указанным выше методом получено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях круглой упругой пластины с круглым отверстием, центр которого может не совпадать с центром внешней окружности. Рассмотренная задача включает случаи круглой, кольцевой и луночной пластин.

Пусть S – область, занимаемая на плоскости R^2 пластиной, т.е. область, ограниченная окружностями L_0, L_1 радиусов R_0, R_1 (соответственно), и расстояние между центрами этих окружностей равно a. Кроме того, обозначим через S_i внутренность круга, ограниченную L_1, и S_e – внешность круга, ограниченную L_0, так что $\overline{S} = S_i \cup S_e$ есть дополнение области S в R^2.

Уравнение собственных колебаний изотропно-упругих пластин имеет вид:

$$\Delta^2 W(x,y) - k^4 W(x,y) = 0, \quad (x,y) = P \in S, \tag{1}$$

где Δ^2 – бигармонический оператор; W – прогиб пластины; k – частота колебаний.

Согласно [1], введем обозначения

$$u_s = (\Delta + (-1)^s k^2) W, s = 1,2. \tag{2}$$

Тогда $W = (2k^2)^{-1} (u_2 - u_1)$, $\Delta W = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ и функции u_1, u_2 удовлетворяют системе соотношений (3) – (5):

$$u_s(P) = \int_L \left[u_s(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_s(P, Q) - G_s(P, Q) \frac{\partial}{\partial n} u_s(Q) \right] dL(Q),$$

$$s = 1,2; \; P \in S; \tag{3}$$

$$0 = \int_L \left[u_s(Q) \frac{\partial}{\partial n} G_s(P_*, Q) - G_s(P_*, Q) \frac{\partial}{\partial n} u_s(Q) \right] dL(Q);$$

$$P_* \in \widetilde{S}, \tag{4}$$

где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к контуру $L = L_0 \cup L_1$, ограничивающему область S, и

$$G_1(P, Q) = \frac{1}{4i} H_0(k\rho) = \frac{1}{4i} [J_0(k\rho) + iY_0(k\rho)];$$

$$G_2(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} K_0(k\rho), \; \rho = |PQ|, \tag{5}$$

H_0 – функция Ханкеля первого рода нулевого порядка, а K_0 – функция Макдональда нулевого порядка.

Соотношения (3) являются интегральными представлениями функций u_s, $s = 1,2$ через граничные значения $u_s(Q)$, $\partial u_s(Q)/\partial n$, для определения которых служат уравнения (4) и граничные условия. Согласно [3], уравнения (4) называются функциональными. Для вывода системы ГИУ относительно u_s, $\partial u_s/\partial n$, $s = 1,2$ (или $W(Q)$, $\partial W(Q)/\partial n$, $\Delta W(Q)$, $\partial \Delta W(Q)/\partial n$) точка P_* устремляется к L. Однако в дальнейшем будем пользоваться уравнениями (4), так как, согласно [2], они равносильны ГИУ и более удобны для получения аналитического решения.

Введя обозначения

$$L_{js}(P) = \int_{L_j} \left[u_s(Q_j) \frac{\partial}{\partial n_j} G_s(P, Q_j) - G_s(P, Q_j) \frac{\partial}{\partial n_j} u_s(Q_j) \right] \times$$

$$\times dL(Q_j), \; Q_j \in L_j, j = 0,1, s = 1,2, \tag{6}$$

перепишем уравнения (4):

$$L_{0s}(P_*) - L_{1s}(P_*) \equiv 0, s = 1,2, \; P_* \in \widetilde{S}. \tag{7}$$

Интегрирование по L в (3), (4) проводится так, что область S всегда остается слева, а в (6) – по направлению против часовой стрелки, поэтому в (7) перед L_{1s} стоит знак минус.

Пусть сначала $P_* = P_e \in S_e$ (рис. 1), тогда

$$\rho_0^2 = |P_eQ_0|^2 = R_0^2 + R_e^2 - 2R_0R_e\cos\psi_0;$$

$$\rho_1^2 = |P_eQ_1|^2 = R_1^2 + \rho_e^2 - 2R_0\rho_e\cos\psi_1;$$

$$\rho_e^2 = |P_eQ_1|^2 = R_e^2 + a^2 - 2R_e\, a\cos\varphi_0;$$

$$\psi_j = \varphi_j - \theta_j;\quad \partial/\partial n_j = (-1)^j\, \partial/\partial R_j,\ j = 0, 1.$$

На основании теоремы сложения цилиндрических функций [4] имеем:

$$\left.\begin{aligned}
&H_0(k\rho_0) = \sum_m H_m(kR_e)\, J_m(kR_0)\, e^{im\psi_0};\\
&\frac{\partial H_0(k\rho_0)}{\partial n_0} = \sum_m H_m(kR_e)\, kJ_m'(kR_0)e^{im\psi_0};\\
&K_0(k\rho_0) = \sum_m K_m(kR_e)\, I_m(kR_0)\, e^{im\psi_0};\\
&\frac{\partial K_0(k\rho_0)}{\partial n_0} = \sum_m K_m(kR_e)\, kI_m'(kR_0)\, e^{im\psi_0};\\
&H_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} H_m(kR_e) J_n(kR_1)\, J_{m-n}(ka)e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0};\\
&\frac{\partial H_0(k\rho_1)}{\partial n_1} = -\sum_{m,n} H_m(kR_e)\, kJ_n'(kR_1)\, J_{m-n}(ka)\, e^{-in\theta_1}e^{im\varphi_0};\\
&K_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} K_m(kR_e)\, I_n(kR_1)\, I_{m-n}(ka)e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0};\\
&\frac{\partial K_0(k\rho_1)}{\partial n_1} = -\sum_{m,n} K_m(kR_e)\, kI_n'(kR_1)\, I_{m-n}(ka)e^{-in\theta_1}e^{im\varphi_0}.
\end{aligned}\right\}(8)$$

В (8) теорема сложения использована последовательно два раза, сначала для $H_0(k\rho_j)$; $K_0(k\rho_j)$, $j = 0{,}1$ и затем для $H_m(k\rho_e)\, e^{im\varphi}$; $K_m(k\rho_e)e^{im\psi}$, где $\psi = \varphi_1 - \varphi_0$.

Подставляя (8) в (7), получаем:

$$L_{01}(P_e) - L_{11}(P_e) = \frac{1}{4i} \sum_m [R_0C_m^{01} + R_1 \sum_n C_n^{11} J_{m-n}(ka)]\, H_m \times$$
$$\times (kR_e)\, e^{im\varphi_0} = 0;$$

$$L_{02}(P_e) - L_{12}(P_e) = -\frac{1}{2\pi} \sum_m [R_0C_m^{02} + R_1 \sum_n C_n^{12} I_{m-n}(ka)] K_m \times$$

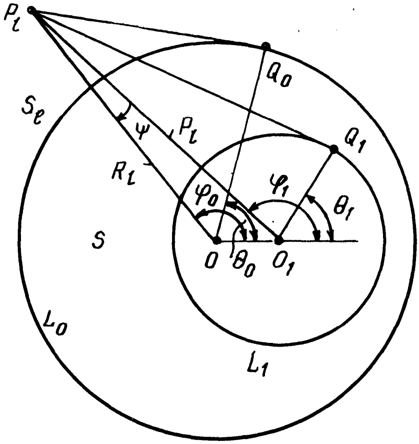

Рис. 1. Схема к теореме сложения цилиндрических функций в точке области S_e

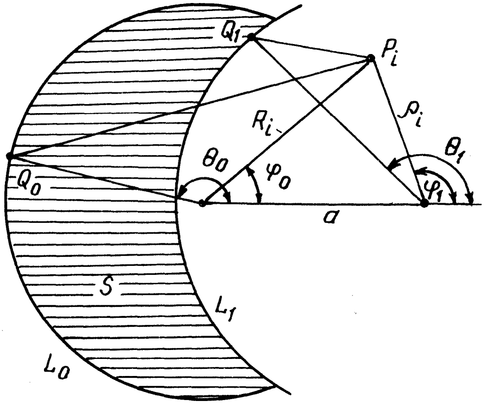

Рис. 2. Схема к теореме сложения цилиндрических функций в точке области S_j

$$\times\ (kR_e)\, e^{im\varphi_0} = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned}
C_m^{j1} &= \int_0^{2\pi} \left[u_1(Q_j)\, kJ_m'(kR_j) - (-1)^j \frac{\partial u_1(Q_j)}{\partial n_j} J_m \times \right. \\
&\left.\times (kR_j)\right] e^{-im\theta_j}\, d\theta_j = kJ_m'(kR_j)\,\alpha_m^{j1} - (-1)^j J_m(kR_j)\beta_m^{j1}; \\
C_m^{j2} &= kI_m'(kR_j)\,\alpha_m^{j2} - (-1)^j I_m(kR_j)\,\beta_m^{j2},\ j = 0, 1,
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$$\alpha_m^{js} = \int_0^{2\pi} u_s(Q_j)\, e^{-im\theta_j}\, d\theta_j;\ \beta_m^{js} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_s(Q_j)}{\partial n_j}\, e^{-im\theta_j}\, d\theta_j,$$

$s = 1,2.$

Поскольку (7) и (9) справедливы для произвольной точки $P_e \in S_e$, выполняются равенства:

$$R_0 C_m^{01} + R_1 \sum_n C_n^{11} J_{m-n}(ka) = 0;\ \ R_0 C_m^{02} + R_1 \sum_n C_m^{12} I_{m-n}(ka) = 0. \tag{11}$$

Суммируя (11) по m и учитывая, что $\sum_m J_{m-n}(ka) = 1$ и $\sum_m I_{m-n}(ka) = e^{ka}$, получим:

$$\sum_m (R_0 C_m^{01} + R_1 C_m^{11}) = 0;\ \ \sum_m (R_0 C_m^{02} + R_1 e^{ka} C_m^{12}) = 0.$$

Следовательно,

$$R_0 C_m^{01} + R_1 C_m^{11} = 0;\ \ R_0 C_m^{02} + R_1 e^{ka} C_m^{12} = 0,\ m = 0, \pm 1;\ \pm 2, \ldots \tag{12}$$

Рассмотрим теперь случай $P_* = P_i \in S_i$ (рис. 2). При этом

$$\rho_0^2 = |P_i Q_0|^2 = R_i^2 + R_0^2 - 2R_0 R_i \cos\psi_0;$$

$$\rho_1^2 = |P_i Q_1|^2 = \rho_i^2 + R_1^2 - 2\rho_i R_1 \cos\psi_1;$$

$$H_0(k\rho_0) = \sum_m H_m(kR_0) J_m(kR_i) e^{im\psi_0};$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} H_0(k\rho_0) = \sum_m kH_m'(kR_0) J_m(kR_i) e^{im\psi_0};$$

$$K_0(k\rho_0) = \sum_m K_m(kR_0) I_m(kR_i) e^{im\psi_0};$$

$$\frac{\partial}{\partial n_0} K_0(k\rho_0) = \sum_m k K_m'(kR_0) I_m(kR_i) e^{im\psi_0};$$

$$H_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} H_n(kR_1) J_m(kR_i) J_{m-n}(ka) e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0};$$

$$K_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} K_n(kR_1) I_m(kR_i) I_{m-n}(ka) e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0};$$

$$\frac{\partial H_0(k\rho_1)}{\partial n_1} = -\sum_{m,n} kH_n'(kR_1) J_m(kR_i) J_{m-n}(ka) e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0};$$

$$\frac{\partial K_0(k\rho_1)}{\partial n_1} = -\sum_{m,n} kK_n'(kR_1) I_m(kR_i) I_{m-n}(ka) e^{-in\theta_1} e^{im\varphi_0}.$$

С помощью известных соотношений [4]

$$H_m'(z) = [J_m'(z) H_m'(z) - \frac{2i}{\pi z}]/J_m(z);$$

$$K_m'(z) = [I_m'(z) K_m(z) - \frac{1}{z}] / I_m(z),$$

приведем (7) к виду:

$$L_{01}(P_i) - L_{11}(P_i) = \frac{1}{4i} \sum_m [R_0 S_m^{01} +$$

$$+ R_1 \sum_n S_n^{11} J_{m-n}(ka)] J_m(kR_i) e^{im\varphi_0} = 0;$$

$$L_{02}(P_i) - L_{12}(P_i) = -\frac{1}{2\pi} \sum_m [R_0 S_m^{02} +$$

$$+ R_1 \sum_n S_n^{12} I_{m-n}(ka)] I_m(kR_i) e^{im\varphi_0} = 0.$$

Эти равенства, как и (9), справедливы для любой точки $P_i \in S_i$, поэтому

$$R_0 S_m^{01} + R_1 \sum_n S_n^{11} J_{m-n} (ka) = 0;$$

$$R_0 S_m^{02} + R_1 \sum_n S_n^{12} I_{m-n} (ka) = 0, \tag{13}$$

где

$$S_m^{j1} = \int_0^{2\pi} [u_1(Q_j) kY_n'(kR_j) - (-1)^j \partial u_1(Q_j) Y_m(kR_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j =$$

$$= kY_m'(kR_j)\, \alpha_m^{j1} - (-1)^j Y_m(kR_j)\, \beta_m^{j1}; \; j = 0,1,$$

$$S_m^{j2} = \int_0^{2\pi} [u_2(Q_j) kK_m'(kR_j) - (-1)^j \partial u_2(Q_j) K_m(kR_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j =$$

$$= kK_m'(kR_j)\, \alpha_m^{j2} - (-1)^j K_m(kR_j)\, \beta_m^{j2}.$$

Повторяя преобразования, проведенные для уравнений (11), получаем:

$$R_0 S_m^{01} + R_1 S_m^{11} = 0; \quad R_0 S_m^{02} + R_1 S_m^{12} e^{ka} = 0,$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{14}$$

Неизвестные α_m^{js}, β_m^{js}, $j = 0, 1$, $s = 1,2$ в (10) – (14), согласно (2), имеют вид:

$$\alpha_m^{j1} = \delta_m^j - k^2 \sigma_m^j; \quad \alpha_m^{j2} = \delta_m^j + k^2 \sigma_m^j; \quad \beta_m^{j1} = \bar{\delta}_m^j - k^2 \bar{\sigma}_m^j;$$

$$\beta_m^{j2} = \bar{\delta}_m^j + k^2 \bar{\sigma}_m^j, \tag{15}$$

где

$$\sigma_m^j = \int_0^{2\pi} W(Q_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j; \quad \delta_m^j = \int_0^{2\pi} \Delta W(Q_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j;$$

$$\bar{\sigma}_m^j = \int_0^{2\pi} \frac{\partial W(Q_j)}{\partial n_j} e^{-im\theta_j} d\theta_j; \quad \bar{\delta}_m^j = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Delta W(Q_j)}{\partial n_j} e^{-im\theta_j} d\theta_j.$$

Таким образом, равенства (12) и (14) образуют систему алгебраических уравнений относительно σ_m^j, $\bar{\sigma}_m^j$, δ_m^j, $\bar{\delta}_m^j$, $j = 0, 1$, которая ради краткости записана в переменных α_m^{js}, β_m^{js}, $j = 0,1$; $s = 1,2$ в виде:

$$kR_0 J_m'(kR_0)\, \alpha_m^{01} - R_0 J_m(kR_0)\, \beta_m^{01} + kR_1 J_m'(kR_1)\, \alpha_m^{11} +$$
$$+ R_1 J_m(kR_1)\, \beta_m^{11} = 0;$$

$$kR_0 Y_m'(kR_0)\, \alpha_m^{01} - R_0 Y_n(kR_0)\, \beta_m^{01} +$$

$$+kR_1 Y'_m\,(kR_1)\,\alpha_m^{11} + R_1 Y_m(kR_1)\beta_m^{11} = 0; \qquad (16)$$

$$kR_0 I'_m\,(kR_0)\,\alpha_m^{02} - R_0 I_m\,(kR_0)\beta_m^{02} +$$

$$+kRe^{ka} I'_m\,(kR_1)\,\alpha_m^{12} + R_1 I_m\,(kR_1)e^{ka}\beta_m^{12} = 0;$$

$$kR_0 K'_m\,(kR_0)\,\alpha_m^{02} - R_0 K_m\,(kR_0)\beta_m^{02} +$$

$$+kR_1 e^{ka} K'_m\,(kR_1)\,\alpha_m^{12} + R_1 K_m\,(kR_1)e^{ka}\beta_m^{12} = 0.$$

Полученная система состоит из четырех уравнений с восемью неизвестными σ^j_m, $\bar{\sigma}^j_m$, δ^j_m, $\bar{\delta}^j_m$, $j = 0, 1$, которые связаны между собой четырьмя граничными условиями. Например, в случае жесткого закрепления обоих контуров эти условия заданы в виде:

$$W(Q_j) = \frac{\partial W\,(Q_j)}{\partial n_j} = 0,\ Q_j = \in L_j \quad \text{или}\quad \sigma^j_m = \sigma^j_m = 0,\ j = 0, 1,$$

$$\forall m. \qquad (17)$$

Поэтому система (16) вместе с граничными условиями позволяет определить все неизвестные (15) или функции $W(Q)$, $\Delta W(Q)$ на границе L. Условие существования нетривиального решения полученной системы будет уравнением частот собственных колебаний пластины.

Рассмотрим частные случаи системы (16) и соответствующие уравнения частот в зависимости от формы пластины для граничных условий (17).

Для случая круглой пластины ($R_1 = 0$) система (16) упрощается:

$$kJ'_m\,(kR_0)\,\delta^0_m - J_m\,(kR_0)\,\bar{\delta}^0_m = 0;\ kI'_m\,(kR_0)\,\delta^0_m -$$

$$- I_m\,(kR_0)\,\bar{\delta}^0_m = 0$$

и уравнение частот совпадает с известным [4]

$$D_m = I'_m\,(kR_0)\,J_m\,(kR_0) - J'_m\,(kR_0)\,I_m\,(kR_0) = 0,$$

а для кольца ($a = 0$) имеет вид:

$$kR_0 J'_m\,(kR_0)\,\delta^0_m - R_0 J_m\,(kR_0)\,\delta^0_m +$$

$$+kR_1 J'_m\,(kR_1)\,\delta^1_m + R_1 J_m\,(kR_1)\,\delta^1_m = 0;$$

$$kR_0 Y'_m\,(kR_0)\,\delta^0_m - R_0 Y_m\,(kR_0)\delta^0_m +$$

$$+kR_1 Y'_m\,(kR_1)\,\delta^1_m + R_1 Y_m(kR_1)\,\delta^1_m = 0;$$

$$kR_0 I'_m\,(kR_0)\,\delta^0_m - R_0 I_m\,(kR_0)\,\delta^0_m +$$

$$+kR_1 I'_m(kR_1)\delta^1_m + R_1 I_m(kR_1)\delta^1_m = 0;$$

$$kR_0 K'_m(kR_0)\delta^0_m - R_0 K_m(kR_0)\delta^0_m +$$

$$+kR_1 K'_m(kR_1)\delta^1_m + R_1 K_m(kR_1)\delta^1_m = 0,$$

и частоты собственных колебаний пластины определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} J_m(kR_0) & Y_m(kR_0) & I_m(kR_0) & K_m(kR_0) \\ J'_m(kR_0) & Y'_m(kR_0) & I'_m(kR_0) & K'_m(kR_0) \\ J_m(kR_1) & Y_m(kR_1) & I_m(kR_1) & K_m(kR_1) \\ J'_m(kR_1) & Y'_m(kR_1) & I'_m(kR_1) & K'_m(kR_1) \end{vmatrix} = 0.$$

Последнее уравнение также совпадает с известным [5].

В общем случае система уравнений (16) имеет нетривиальное решение, если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} J_m(kR_0) & Y_m(kR_0) & I_m(kR_0) & K_m(kR_0) \\ J'_m(kR_0) & Y'_m(kR_0) & I'_m(kR_0) & K'_m(kR_0) \\ J_m(kR_1) & Y_m(kR_1) & I_m(kR_1)e^{ka} & K_m(kR_1)e^{ka} \\ J'_m(kR_1) & Y'_m(kR_1) & I'_m(kR_1)e^{ka} & K'_m(kR_1)e^{ka} \end{vmatrix} = 0,$$

которое является уравнением частот собственных колебаний пластины с отверстием. Система уравнений (16) может быть также использована при граничных условиях, отличных от условий жесткого закрепления пластины. С учетом того, что граничные функции $u_s(Q)$, $\partial u_s(Q)/\partial n$, $s = 1, 2$ удовлетворяют (4) или эквивалентной им системе уравнений (16), получим общее решение уравнения (1), вытекающее из (3). Для этого возьмем произвольную точку $P \in S$ (рис. 3). Тогда

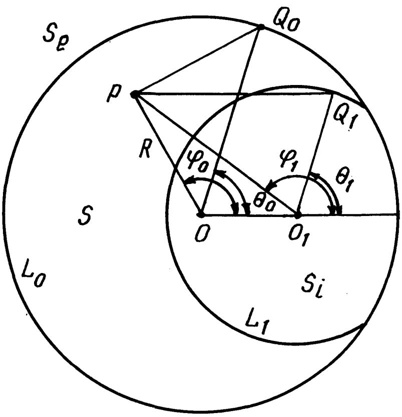

Рис. 3. Схема к вычислению решения в точке области S

$$\rho_0^2 = |PQ_0|^2 = R^2 + R_0^2 - 2RR_0\cos(\varphi_0 - \theta_0);$$
$$\rho_1^2 = |PQ_1|^2 = \rho^2 + R_1^2 - 2\rho R_1 \cos(\varphi_1 - \theta_1);$$
$$\rho^2 = |PO_1|^2 = R^2 + a^2 - 2R\cos\varphi_0 .$$

Предполагая, что центр пластины находится в области, ограниченной b_S (т.е. область S не содержит начала координат), и вновь используя теорему сложнения цилиндрических функций, будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}
&H_0(k\rho_0) = \sum_m H_m(kR_0)J_m(kR)e^{im\psi_0};\\
&\frac{\partial}{\partial n_0}H_0(k\rho_0) = \sum_m kH'_m(kR_0)J_m(kR)e^{im\psi_0};\\
&K_0(k\rho_0) = \sum_m K_m(kR_0)I_m(kR)e^{im\psi_0};\\
&\frac{\partial}{\partial n_0}K_0(k\rho_0) = \sum_m kK'_m(kR_0)I_m(kR)e^{im\psi_0};\\
&H_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} H_m(kR)J_n(kR_1)J_{m-n}(ka)e^{im\varphi_0}e^{-in\theta_1};\\
&K_0(k\rho_1) = \sum_{m,n} K_m(kR)I_n(kR_1)I_{m-n}(ka)e^{im\varphi_0}e^{-in\theta_1};\\
&\frac{\partial}{\partial n_1}H_0(k\rho_1) = -\sum_{m,n} kH_m(kR)J'_n(kR_1)J_{m-n}(ka)e^{im\varphi_0}e^{-in\theta_1};\\
&\frac{\partial}{\partial n_1}K_0(k\rho_1) = -\sum_{m,n} kK_m(kR)I'_n(kR_1)I_{m-n}(ka)e^{im\varphi_0}e^{-in\theta_1}
\end{aligned}\right\}$$

Подставляя (18) в (3), которые могут быть переписаны в виде

$$u_s(P) = u_s(P,\varphi_0) = L_{0s}(P) - L_{1s}(P); \quad s = 1,2$$

с учетом (11) и (13) получаем:

$$u_1(R,\varphi_0) = \frac{R_0}{4}\sum_m [S_m^{01}J_m(kR) - C_m^{01}Y_m(kR)]e^{im\varphi_0};$$
$$u_2(R,\varphi_0) = -\frac{R_0}{2\pi}\sum_m [S_m^{02}I_m(kR) - C_m^{02}K_m(kR)]e^{im\varphi_0},$$

или в силу (2):

$$W(P) = -\frac{R_0}{4\pi k^2}\sum_m e^{im\varphi_0}\Big\{k\frac{\pi}{2}[Y'_m(kR_0)J_m(kR) -$$
$$- J'_m(kR_0)Y_m(kR)]\alpha_m^{01} - \frac{\pi}{2}[Y_m(kR_0)J_m(kR) - J_m(kR_0)Y_m(kR)]\beta_m^{01} +$$

$$+k\left[K_m'(kR_0)\,I_m(kR)-I_m'(kR_0)K_m(kR)\right]\alpha_m^{02}+$$

$$+\left[K_m(kR_0)\,I_m(kR)-I_m(kR_0)K_m(kR)\right]\beta_m^{02}\Big\};$$

$$\Delta W(P)=\frac{R_0}{4\pi}\sum_m e^{im\varphi_0}\Big\{k\frac{\pi}{2}\left[Y_m'(kR_0)J_m(kR)-\right.$$

$$\left.-J_m'(kR_0)\,Y_m(kR)\right]\alpha_m^{01}-\frac{\pi}{2}\left[Y_m(kR_0)\,J_m(kR)-\right.$$

$$\left.-J_n(kR_0)\,Y_m(kR)\right]\beta_m^{01}-k\left[K_m'(kR_0)I_m(kR)-\right.$$

$$\left.-I_m'(kR_0)\,K_m(kR)\right]\alpha_m^{02}-\left[K_m(kR_0)I_m(kR)-I_m(kR_0)K_m(kR)\right]\beta_m^{02}\Big\}.$$

где постоянные α_m^{js}, β_m^{js}, $j=0,1$, $s=1,2$ определяются из (16) и граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Романчик В.С., Кхием Н.Т. Метод граничных интегральных уравнений в решении задачи колебаний вязкоупругих пластин при случайных воздействиях // Докл. АН БССР. – 1986. – Т. 30, № 11. – С. 965–968. 2. Кхием Н.Т., Романчик В.С. Метод граничных интегральных уравнений в динамических задачах теории упругости при случайных воздействиях // Шестой Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике: Аннотации докл. – Ташкент, 1986. – С. 405. 3. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. – М., 1963. – 472 с. 4. Коренев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М., 1971. – 288 с. 5. Вибрации в технике / Под ред. В.В. Болотина. – М., 1978. – Т. 1. – 352 с.

УДК 539.3

А.А. ДАШКЕВИЧ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ БАЛКИ НА НЕОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СТЕПЕННОГО ТИПА

Рассматривается задача изгиба балки под действием нормальной нагрузки не неоднородном основании, модуль упругости которого меняется по степенному закону. Предполагается, что балка деформируется по толщине под действием внешней нагрузки и реакции отпора основания.

Пусть балка длиной $2a$ и шириной $2b$ ($a \gg b$) изгибается на неоднородном полупространстве, модуль упругости которого изменяется по закону $E=E_\mu z^\mu$ ($0\leqslant\mu<1$) под действием нормальной нагрузки $q(x)$. Тогда нормальное перемещение w_0 (x,y) определяется формулой [1]