

$$g(x) = \frac{l}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\lambda^- g'(\tau) d\tau}{\tau - x} + \frac{l}{\pi} \int_{-l}^l \frac{\lambda^+ \overline{g'(\tau)} d\tau}{\tau - x} + \frac{f_0}{\kappa + 1}, \quad (13)$$

где

$$\lambda^\pm = \frac{h}{l(\kappa + 1)} \left[ \frac{\kappa - 1}{4} \left( \sqrt{\gamma_1 \gamma_2} \pm \frac{\nu_0}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \right) + \frac{\mu_0}{\mu} \left( \frac{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}}{2} \pm \frac{(1 - \nu_0)}{4\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}} \right) \right].$$

После решения уравнения (13) предельные значения компонент напряжений на вещественной оси можно найти по формуле

$$\sigma_y^+ + \eta \tau_{xy}^+ = \Gamma - \Gamma' + \frac{1}{\pi i} \int_{-l}^l \frac{g'(\tau) d\tau}{\tau - x}, \quad |x| < l.$$

Уравнение (13) относится к хорошо изученному классу сингулярных уравнений. Для их приближенного решения разработаны эффективные методы. Оно сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений плотности  $g(\tau)$  в узлах интерполяции [5].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Соткилава О.В., Черепанов Г.П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости // ПММ. — 1974. — Т. 38, вып. 3. — С. 539–550.
2. Куршин Л.М., Суздальский И.Д. Напряжения в плоскости с заполненной щелью // Прикл. механика. — 1973. — Т. 9, № 10. — С. 62–68.
3. Драган С.М., Опаносович В.К. Напряженное состояние полосы (балки) с прямолинейным тонкостенным включением // ПММ. — 1979. — Т. 43, вып. 2. — С. 342–348.
4. Прусов И.А. Термоупругие анизотропные пластинки. — Мн., 1978. — 200 с.
5. Каландия А.К. Математические методы двумерной упругости. — М., 1973. — 303 с.

УДК 539.3. : 534.1

В.И. ПРУСОВ

### КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассматриваются незатухающие колебания однородной изотропной полосы, жестко сцепленной с неподвижным основанием и находящейся под действием периодической силы, приложенной внутри полосы.

Пусть  $S^- (-H < y < 0)$  — область комплексной плоскости  $z = x + iy$ , занимаемая полосой шириной  $H$ ;  $L (y = 0)$  и  $L_1 (y = -H)$  — верхний и нижний

контуры полосы. В точке  $z_0 = ih$  ( $0 < h < H$ ) области  $S^-$  приложена сила  $P = P_0 f(t)$ , где  $f(t) = \sin \omega t$ ;  $t$  — время;  $\omega$  — круговая частота колебаний. Внешняя нагрузка на  $L$  отсутствует, деформация плоская, компоненты перемещений  $u = v = 0$  на  $L_1$ .

Напряженно-деформированное состояние полосы в произвольной точке области  $S^-$  определяется по формулам [1, 2]:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] f(t); \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_y - i\tau_{xy} &= [\Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi'(z)}] f(t); \\ 2\mu(u + iv) &= [\kappa\varphi(z) + \varphi(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)}] f(t); \\ Y - iX &= [\varphi(z) - \varphi(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi(z)} + C_1] f(t), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где  $\Phi(z)$  — произвольная аналитическая функция комплексного переменного  $z$ ;  $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$ ;  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — компоненты напряжений;  $u, v$  — компоненты перемещений,  $X = \int_{-\infty}^{\infty} \tau_{xy} dx$ ;  $Y = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y dx$ ;  $C_1$  — произвольная постоянная.

Необходимо удовлетворить граничным условиям

$$X = Y = 0 \text{ на } L \text{ и } u = v = 0 \text{ на } L_1. \quad (3)$$

Очевидно, что условия (3) выполняются, если

$$\left. \begin{aligned} Y = \operatorname{Re} [\varphi(z) - \overline{\varphi(z)} + (\bar{z} - z) \Phi(z)] f(t) &= 0 \text{ на } L; \\ -X = \operatorname{Im} [\varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - (\bar{z} - z) \Phi(z)] f(t) &= 0 \text{ на } L; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu u = \operatorname{Re} [\kappa\varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - (\bar{z} - z) \Phi(z)] f(t) &= 0 \text{ на } L_1; \\ 2\mu v = \operatorname{Im} [\kappa\varphi(z) - \overline{\varphi(z)} + (\bar{z} - z) \Phi(z)] f(t) &= 0 \text{ на } L_1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пусть в уравнениях (4) и (5)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) - \overline{\varphi(z)} + (\bar{z} - z) \Phi(z) &= \varphi_0(z) - \overline{\varphi_0(z)} + (\bar{z} - z) \Phi_0(z) + \\ &+ (\bar{z} - z) [F_1(z) - F_1(\bar{z})] + i(\bar{z} - z) [F_2(z) - F_2(\bar{z})]; \\ \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} - (\bar{z} - z) \Phi(z) &= \varphi_0(z) + \overline{\varphi_0(z)} - (\bar{z} - z) \Phi_0(z) - \\ &- (\bar{z} - z) [F_1(z) - F_1(\bar{z})] - i(\bar{z} - z) [F_2(z) - F_2(\bar{z})], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $z \in S^-$ ;  $\varphi_0(z) = \int_{-\infty}^z [A_0(\tau) + B_0(\tau)] d\tau$ ,  $\overline{\varphi_0(z)} = \int_{-\infty}^{\bar{z}} [\overline{A_0(\tau)} + B_0(\tau)] d\tau$ ;

$$F_1(z) = \frac{\operatorname{cth} \gamma z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \gamma \tau q_1(\tau) d\tau}{\tau - z - iH}; \quad F_1(\bar{z}) =$$

$$= \frac{\operatorname{cth} \gamma z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{cth} \gamma \tau q_1(\tau) d\tau}{\tau - \bar{z} + iH};$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_2(\tau) d\tau}{\tau - z - iH};$$

$$F_2(\bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_2(\tau) d\tau}{\tau - \bar{z} + iH};$$

$$\Phi_0(z) = A_0(z) + B_0(z);$$

$$A_0(z) = \frac{\gamma P}{\operatorname{sh} \gamma (z - z_0)} + \frac{(1 - \kappa) \beta P}{\operatorname{sh} \beta (z + z_1)}; \quad P = \frac{iP_0}{2\pi(1 + \kappa)};$$

$$B_0(z) = - \frac{\gamma \kappa P}{\operatorname{sh} \gamma (z - \bar{z}_0)} + \frac{(z_0 - \bar{z}_0) \bar{P} \gamma^2 \operatorname{ch} \gamma (z - \bar{z}_0)}{[\operatorname{sh} \gamma (z - \bar{z}_0)]^2};$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2H}; \quad \beta = \frac{\pi}{3H+h}; \quad z_1 = (2H - h)i; \quad q_n(\tau) \quad - \text{ вещественные}$$

функции;  $\kappa = 3 - 4\nu$ .

Из уравнений (6) находим:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z); \\ -\bar{\varphi}(z) + (\bar{z} - z) \Phi(z) &= -\bar{\varphi}_0(z) + (\bar{z} - z) \Phi_0(z) + \\ &+ (\bar{z} - z) [F_1(z) - F_1(\bar{z})] + i(\bar{z} - z) [F_2(z) - F_2(\bar{z})]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Подставив выражения (7) в соотношения (5) и применив затем формулы Сохоцкого, получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} [\kappa \varphi_0(t) + \bar{\varphi}_0(t) - 2iH \Phi_0(t)] - 2Hq_2(x) &= 0; \\ \operatorname{Im} [\kappa \varphi_0(t) - \bar{\varphi}_0(t) + 2iH \Phi_0(t)] - 2Hq_1(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где  $t = x - iH$  — точки, принадлежащие  $L_1$ .

Соотношениями (8) вполне определяются функции  $q_n(x)$ . Зная их, можно найти компоненты напряжений и перемещений в любой точке области  $S^-$ . В частности, для нахождения перемещений на верхнем контуре полосы получим формулы:

$$u = \frac{P_0}{4\pi\mu} [(\kappa - 1) (\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \gamma x}{\sin \gamma h} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \beta x}{\sin \alpha}) +$$

$$+ \frac{4\gamma h \cos \gamma h \operatorname{sh} \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma x - \cos 2\gamma h} \Big] f(t);$$

$$v = \frac{P_0}{4\pi\mu} \left( \frac{\kappa + 1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \gamma x + \cos \gamma h}{\operatorname{ch} \gamma x - \cos \gamma h} + \frac{\kappa - 1}{2} \ln \frac{\operatorname{ch} \beta x + \cos \alpha}{\operatorname{ch} \beta x - \cos \alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{4\gamma h \sin \gamma h \operatorname{ch} \gamma x}{\operatorname{ch} 2\gamma x - \cos 2\gamma h} \right) f(t),$$

где  $P_0$  — проекция силы на ось  $y$ ,  $\alpha = \beta(2H - h)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Василевич Ю.В., Прусов В.И. Об одном представлении общих формул упругих колебаний однородной изотропной полосы // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1986. — № 2. — С. 101–105. 2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 707 с.

УДК 539.3

В.С. РОМАНЧИК, НГУЕН ТИЕН КХИЕМ

#### РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Исследование собственных колебаний упругих пластин с отверстиями представляет собой трудную задачу, решение которой, как правило, требует использования численных методов. Метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) может быть эффективно применен для решения задач о колебаниях пластин со сложной границей. В данной работе указанным выше методом получено аналитическое решение задачи о собственных колебаниях круглой упругой пластины с круглым отверстием, центр которого может не совпадать с центром внешней окружности. Рассмотренная задача включает случаи круглой, кольцевой и луночной пластин.

Пусть  $S$  — область, занимаемая на плоскости  $R^2$  пластиной, т.е. область, ограниченная окружностями  $L_0$ ,  $L_1$  радиусов  $R_0$ ,  $R_1$  (соответственно), и расстояние между центрами этих окружностей равно  $a$ . Кроме того, обозначим через  $S_i$  внутренность круга, ограниченную  $L_1$ , и  $S_e$  — внешность круга, ограниченную  $L_0$ , так что  $\bar{S} = S_i \cup S_e$  есть дополнение области  $S$  в  $R^2$ .

Уравнение собственных колебаний изотропно-упругих пластин имеет вид:

$$\Delta^2 W(x, y) - k^4 W(x, y) = 0, \quad (x, y) = P \in S, \quad (1)$$

где  $\Delta^2$  — бигармонический оператор;  $W$  — прогиб пластины;  $k$  — частота колебаний.