

$$\forall K \in \tau \quad P^K = P_K(K),$$

$$G^K = \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,1}} P_0(\partial K_{r,1}),$$

где через $P_i(\cdot)$ обозначено пространство полиномов i -й степени, определенных на соответствующей области.

Отношение радиусов вала и выточки $R/r = 5$.

При решении задачи в процессе формирования матриц жесткости внутренние степени свободы КЭ выражались через граничные степени свободы (конденсировались). Поэтому порядок разрешающей системы линейных алгебраических уравнений для данной задачи определялся числом гладких участков $\Gamma_{r,1}$ межэлементной границы и для выбранного разбиения был равен пяти. Машинное время расчета одного варианта на ЭВМ ЕС 1035 составило от трех до пяти минут.

Сопоставление результатов расчета с точным решением задачи показало, что для порядков аппроксимации $k = 4; 5; 6$ функции напряжений на КЭ разница между полученным и точным значением коэффициента концентрации касательных напряжений на дне выточки оказалась равной $\epsilon = -57, -10,5; +2,7\%$ (соответственно). Таким образом, при высоких порядках аппроксимации функции в пределах КЭ высокая точность расчета напряжений может быть достигнута при весьма грубом разбиении области на КЭ.

Предлагаемый метод применялся и показал высокую эффективность при решении других задач механики, в частности задач изгиба пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М., 1980. — 512 с.
2. Апанович В. Н. Признак внешних аппроксимаций конечными элементами обобщенных решений краевых задач механики // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1987. — Вып. 14. — С. 47–54.
3. Корнеев В. Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л., 1977. — 206 с.
4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. — М., 1968. — Т. 2. — 590 с.

УДК 539.3

Ю. В. ВАСИЛЕВИЧ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩИХ ФОРМУЛ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Ниже приводится новое представление компонентов напряжений и перемещений для трехмерного ортотропного тела через произвольную квазигармоническую функцию при стационарном распределении температуры.

Пусть u, v, w — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовых координат x, y, z ; σ_{ij} и e_{ij} — компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука [1]

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} \sigma_{jj} + \alpha_j T &= e_{ij}; \\ a_{44} \tau_{yz} &= e_{yz}; \quad a_{55} \tau_{xz} = e_{xz}; \quad a_{66} \tau_{xy} = e_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

и при отсутствии массовых сил уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2)$$

где α_j — коэффициент линейного расширения на главных направлениях упругости тела.

Рассматриваемое тело обладает прямолинейной тепловой анизотропией и однородно. Оси координат совпадают с главными направлениями теплопроводности. Температура $T(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

где k_i — коэффициенты теплопроводности.

Решение уравнений (2) и (1) для касательных напряжений запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \\ \sigma_z &= \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xz} = -\xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}; \quad \tau_{yz} = -\eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}; \\ u &= 0,5 (\eta a_{44} - \xi a_{55} - a_{66}) \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v = 0,5 (\xi a_{55} - \eta a_{44} - \\ & - a_{66}) \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \\ w &= 0,5 (a_{66} - \eta a_{44} - \xi a_{55}) \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где ξ, η — произвольные коэффициенты; $\Phi = \Phi(x, \mu y, \lambda z)$ — произвольная квазигармоническая функция относительно переменных x, y, z ; μ и λ — некоторые безразмерные постоянные.

Для решения уравнений (1) для нормальных напряжений необходимо, чтобы

$$\begin{aligned} \mu^2 &= [a_{12} + 0,5 a_{66} + \xi (a_{13} + 0,5 a_{55}) - 0,5 \eta a_{44}] (a_{11} + \eta a_{13})^{-1} = \\ &= (a_{22} + \xi a_{23}) [a_{21} + 0,5 a_{66} + \eta (a_{23} + 0,5 a_{44}) - 0,5 \xi a_{55}]^{-1} = \\ &= (a_{32} + \xi a_{33}) (a_{31} + \eta a_{33})^{-1}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\lambda^2 = [a_{12} + 0,5 a_{66} + \xi (a_{13} + 0,5 a_{55}) - 0,5 \eta a_{44}] (\xi a_{11} + \eta a_{12})^{-1} =$$

$$= (a_{32} + \xi a_{33}) [\xi (a_{31} + 0,5a_{55}) + \eta (a_{32} + 0,5a_{44}) - 0,5a_{66}]^{-1} =$$

$$= (a_{22} + \xi a_{23}) (\xi a_{21} + \eta a_{22})^{-1}; \quad (5)$$

$$\alpha_1 / [a_{12} + 0,5a_{66} + \xi (a_{13} + 0,5a_{55}) - 0,5\eta a_{44}] = \alpha_2 / (a_{22} + a_{23}\xi) =$$

$$= \alpha_3 / (a_{32} + a_{33}\xi). \quad (6)$$

Из системы уравнений (5) путем исключения ξ и η получим кубическое уравнение относительно параметра $x = \lambda^2$:

$$M_0 x^3 - M_1 x^2 + M_2 x - M_3 = 0, \quad (7)$$

где

$$M_0 = a_{66} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21});$$

$$M_1 = a_{22} a_{66} (a_{55} + a_{13} + a_{31}) + a_{44} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) -$$

$$- a_{66} (a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32});$$

$$M_2 = a_{22} a_{44} (a_{55} + a_{13} + a_{31}) + a_{66} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) -$$

$$- a_{44} (a_{12} a_{23} + a_{21} a_{32});$$

$$M_3 = a_{44} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}).$$

Уравнение (7) имеет три корня, из которых по крайней мере один вещественный. Зафиксируем какой-либо один из них, полагая $x = \lambda^2$. Считая x известным, из соотношений (5) выразим ξ, η :

$$\xi = a_{22} / (2\Delta) \cdot (x a_{66} - a_{44}); \quad (8)$$

$$\eta = 1/\Delta [a_{22} (a_{11} x - a_{13} - 0,5a_{55}) - (a_{12} + 0,5a_{66}) (a_{21} x - a_{23})],$$

$$\text{где } \Delta = a_{22} x (a_{11} x - a_{13} - 0,5a_{55}) - (a_{21} x - a_{23}) (a_{12} x + 0,5a_{44}).$$

Из равенств (4) следует, что ξ и η должны удовлетворять также уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} &0,5a_{33} (a_{55} \xi^2 - a_{44} \xi \eta) + [a_{23} a_{31} + 0,5a_{32} a_{55} - a_{33} (a_{21} + \\ &+ 0,5a_{66})] \xi + [a_{22} a_{33} - a_{32} (a_{23} + 0,5a_{44})] \eta + a_{22} a_{31} - \\ &- a_{32} (a_{21} + 0,5a_{66}) = 0; \\ &0,5a_{33} (a_{44} \eta^2 - a_{55} \xi \eta) + [a_{11} a_{33} - a_{31} (a_{13} + 0,5a_{55})] \xi + \\ &+ [a_{13} a_{32} + 0,5a_{31} a_{44} - a_{33} (a_{12} + 0,5a_{66})] \eta + a_{11} a_{32} - \\ &- a_{31} (a_{12} + 0,5a_{66}) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Исключив в уравнениях (9) с учетом соотношений (8) неизвестные ξ и η , получим два уравнения 4-й степени относительно x :

$$a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0; \quad (10)$$

$$b_0 x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4 = 0, \quad (11)$$

где a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) приведены в [2]. При этом $\mu^2 = (a_{32} + \xi a_{33}) \times (a_{31} + \eta a_{33})^{-1}$.

Потребуем, чтобы уравнения (7), (10), (11) имели два общих корня $x_k = \lambda_k^2$ ($k = 1, 2$). Такие корни находятся из уравнения

$$(m_0 M_1 - m_1 M_0) x^2 - (m_0 M_2 - m_2 M_0) x + m_0 M_3 - m_3 M_0 = 0, \quad (12)$$

где $m_0 = b_0 a_1 - a_0 b_1$; $m_1 = a_0 b_2 - b_0 a_2$; $m_2 = b_0 a_3 - a_0 b_3$; $m_3 = a_0 b_4 - b_0 a_4$.

Уравнение (12) получаем исключением в полиномах (10) и (11) x^4 , а затем в полученном кубическом уравнении и выражении (7) — исключением x^3 . Далее из соотношений (6) определим ξ и η :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (\alpha_3 a_{22} - \alpha_2 a_{32}) (\alpha_2 a_{33} - \alpha_3 a_{23})^{-1}; \\ \eta &= \frac{2}{\alpha_2 a_{44}} \left\{ \xi [\alpha_2 (a_{13} + 0,5 a_{55}) - \alpha_1 a_{23}] + \alpha_2 (a_{12} + 0,5 a_{66}) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha_1 a_{22} \right\}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Подставляя в выражения (13) ξ и η , определенные по формулам (8), получим два квадратных уравнения:

$$r_2 x^2 + r_1 x + r_0 = 0; \quad (14)$$

$$p_2 x^2 + p_1 x + p_0 = 0, \quad (15)$$

где

$$r_2 = (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) (\alpha_3 a_{22} - \alpha_2 a_{32}); \quad r_1 = q_1 (\alpha_3 a_{22} - \alpha_2 a_{32}) - 0,5 q_2 a_{22} a_{66};$$

$$r_0 = 0,5 \alpha_2 a_{44} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}); \quad p_2 = q_3 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21});$$

$$p_1 = q_3 [a_{12} a_{23} - 0,5 a_{21} a_{44} - a_{22} (a_{13} + 0,5 a_{55})] -$$

$$- q_2 \alpha_2 a_{44} [a_{11} a_{22} - a_{21} (a_{12} + 0,5 a_{66})];$$

$$p_0 = 0,5 q_3 a_{23} a_{44} + q_2 \alpha_2 a_{44} [a_{22} (a_{13} + 0,5 a_{55}) - a_{23} (a_{12} + 0,5 a_{66})];$$

$$q_1 = a_{12}a_{23} - 0,5a_{21}a_{44} - a_{22}(a_{13} + 0,5a_{55}); \quad q_2 = a_2a_{33} - a_3a_{23};$$

$$q_3 = 2 \left\{ (a_3a_{22} - a_2a_{32}) [a_2(a_{13} + 0,5a_{55}) - a_1a_{23}] + (a_2a_{33} - a_3a_{23}) [a_2(a_{12} + 0,5a_{66}) - a_1a_{22}] \right\}.$$

В итоге имеем три квадратных уравнения (12), (14), (15) относительно x . Потребуем, чтобы уравнения (14), (15) имели один общий корень. Исключив в них x^2 , найдем его:

$$x = 2r_0 [a_2(a_{12} + 0,5a_{66}) - a_1a_{22}] \left\{ a_{22}a_{66}q_2 [a_2(a_{12} + 0,5a_{66}) - a_1a_{22}] - (a_3a_{22} - a_2a_{32}) \left\{ a_{22}a_{66} [a_1a_{23} - a_2(a_{13} + 0,5a_{55})] + a_2a_{44} [a_{11}a_{22} - a_{21}(a_{12} + 0,5a_{66})] \right\} \right\}^{-1}.$$

Подставив полученное выражение x в уравнение (12), удовлетворим равенство, представляющее ограничение на упругие постоянные и коэффициенты линейного расширения материала.

Три уравнения закона Гука для нормальных напряжений становятся эквивалентными друг другу, и функцию $\Phi(x, y, z)$ можно определить из любого из них, например из уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = - \frac{a_2 T}{a_{22} + a_{23} \xi}$$

при известном распределении температурного поля $T(x, y, z)$ в исследуемой области.

Таким образом, компоненты напряжений и перемещений для ортотропного тела при стационарном распределении температуры определяются по формулам (3), если a_{ij} и α_i удовлетворяют уравнению (12).

Рассмотрим частный случай ортотропного тела, имеющего плоскость изотропии, перпендикулярную к оси z . Предположим, что между коэффициентами a_{ij} и α_i имеют место зависимости $a_{22} = a_{11}$; $a_{21} = a_{12}$; $a_{66} = 2(a_{11} - a_{12})$; $a_{32} = a_{31}$; $a_{23} = a_{13}$; $a_{55} = a_{44}$; $\alpha_1 = \alpha_2$ и, кроме того, $\xi = \eta$.

Подставляя выражение (3) в уравнение закона Гука для нормальных напряжений, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{(a_{12} + a_{11}) \xi}{a_{11} + a_{13} \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{a_2}{a_{11} + a_{13} \xi} T = 0; \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\xi(2a_{31} + a_{55}) - 0,5a_{66}}{a_{31} + a_{33} \xi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{a_3 T}{a_{31} + a_{33} \xi} = 0. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Потребуем, чтобы

$$\lambda^2 = \frac{a_{11} + \xi a_{13}}{\xi(a_{11} + a_{12})} = \frac{a_{31} + \xi a_{33}}{\xi(a_{44} + 2a_{31}) - 0,5a_{66}}.$$

Отсюда

$$[a_{33}(a_{11} + a_{12}) - a_{13}(a_{44} + 2a_{31})]\xi^2 + [(a_{31} - a_{13})(a_{11} + a_{12}) - a_{11}a_{44}]\xi + a_{11}(a_{11} - a_{12}) = 0. \quad (17)$$

Следовательно,

$$\lambda_k^2 = \frac{a_{11} + a_{13}\xi_k}{(a_{11} + a_{12})\xi_k},$$

где ξ_1 и ξ_2 — корни уравнения (17); $k = 1, 2$.

Преобразуем уравнения (16):

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_1^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} = - \frac{\alpha_2 T}{a_{11} + a_{13}\xi_1};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = - \frac{\alpha_3 T}{a_{31} + a_{33}\xi_2},$$

где $\Phi_1 = \Phi_1(x, y, \lambda_1 z)$, $\Phi_2 = \Phi_2(x, y, \lambda_2 z)$.

Общие формулы (без ограничений на коэффициенты a_{ij} и α_i) для напряжений и перемещений трансверсально-изотропного тела можно записать в следующем виде:

$$\sigma_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_k; \quad \sigma_y = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi_k \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi_k;$$

$$\sigma_z = \xi_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi_k; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \Phi_k;$$

$$\tau_{xz} = - \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \Phi_k \xi_k; \quad \tau_{yz} = - \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \Phi_k \xi_k;$$

$$u = -0,5a_{66} \frac{\partial}{\partial x} \Phi_k; \quad v = -0,5a_{66} \frac{\partial}{\partial y} \Phi_k; \quad w = 0,5(a_{66} - 2\xi_k a_{44}) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial z} \Phi_k,$$

где $k = 1, 2$.

Полученные формулы удовлетворяют принципу предельного перехода к изотропному телу и позволяют получить решения основных граничных задач для ортотропного полупространства и ортотропного пространства с разрезами на плоскости $z = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. — М., 1977. — 415 с.
2. Прусов И.А., Василевич Ю.В. Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ., мат. и мех. — 1981. — № 3. — С. 39—45.

УДК 539.3

В.А. САВЕНКОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

При исследовании прочности пластинчатых элементов конструкций необходимо учитывать наличие в них различного рода концентраторов напряжений. В известных исследованиях [1—3] изучался случай изотропного материала. В данной статье рассматривается напряженное состояние ортотропной пластинки с изотропным тонкостенным включением.

Рассмотрим ортотропную пластинку, содержащую инородное изотропное тонкостенное включение (длиной $2l$, толщиной h), расположенное на оси x . Пластинка находится под воздействием равномерно распределенных на бесконечности напряжений

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty; \sigma_y = \sigma_y^\infty; \tau_{xy} = \tau_{xy}^\infty. \quad (1)$$

Имея в виду тонкостенность включения, будем учитывать лишь относительное смещение его берегов, пренебрегая различием напряжений на них. На берегах разреза примем:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = \sigma_y; \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = \tau_{xy}. \quad (2)$$

Интегрирование по ширине разреза зависимостей

$$\sigma_y = \frac{E_0}{1-\nu_0^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right); \tau_{xy} = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

приводим к равенствам [2]:

$$\left. \begin{aligned} v^+ - v^- &= \frac{(1-\nu_0^2)h}{E_0} \sigma_y - \nu_0 \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^+ + u^-); \\ u^+ - u^- &= \frac{2(1+\nu_0)h}{E_0} \tau_{xy} - \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v^+ + v^-), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где ν_0, E_0 — коэффициент Пуассона и модуль Юнга для включения; u, v — проекции смещений на оси координат x и y .