Характер изменения напряжений во всем кубе совпадает с выявленным в работе [1]: в средней части куба существует зона растягивающих нормальных напряжений σ_x. Выше и ниже этой зоны напряжения σ_x сжимающие. Наибольшее касательное напряжение в части куба, находящейся в первом октанте, отмечается около линии $x = 3/8 \cdot a, z = 3/8 \cdot a$ (табл. 1).

Ряды быстросходящиеся. Достаточно пяти членов ряда, чтобы получить результаты, совпадающие с результатами работы [1] по значениям напряжений σ_x и τ_{xz} в соответствующих точках. Значения напряжений σ_z в сравниваемых точках отличаются не более чем на 7 %. При десяти членах ряда получаем такой же результат. Время счета на ЭВМ 5 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В а л о в Г.М. Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями //Вестн.МГУ.Сер. мат., мех., астроном., физ., хим. — 1959. — № 3. — С. 35—41. 2. К р у ш е в с к и й А.Е. Общее решение задачи о равновесии упругого цилиндрического тела // 25-я науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теорет. и прикл. механики. — Мн., 1969. — С. 3—12.

УДК 539.3:519.63

В.Н. АПАНОВИЧ

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Важнейшим этапом разработки схем метода конечных элементов (КЭ) является построение конечных элементов, так как аппроксимативные качества КЭ оказывают решающее влияние на эффективность той или иной схемы в целом [1]. В настоящей статье дается метод построения КЭ произвольной геометрии для внешних аппроксимаций обобщенных решений краевых задач механики.

1. Пусть задано разбиение τ липшицевой области $\bar{\Omega} \in R^n$ на КЭ K, удовлетворяющее условиям: а) $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{K \in \tau} K$; б) $\forall K \in \tau$ область K замкнута и множество $\overset{\circ}{K}$ ее внутренних точек непусто; в) $\forall K^1, K^2 \in \tau$ $\overset{\circ}{K}{}^1 \cap \overset{\circ}{K}{}^2 = \varnothing$; г) $\forall K \in \tau$ граница ∂K липшицева, кусочно-гладкая. Следуя [2], определим грань КЭ как связный участок ∂K_r границы ∂K, отделяющий данный КЭ от смежного с ним и являющийся кусочно-гладким многообразием размерности $n-1$. Обозначим: $M(\partial K_r)$ — множество граней КЭ; $M(\partial K_{r,l})$ — множество гладких участков $\partial K_{r,l}$ грани ∂K_r; $M(\Gamma_r)$ — множество межэлементных границ разбиения τ; $M(\Gamma_{r,l})$ — множество гладких участков межэлементных границ разбиения; $M(\Gamma^*_{r,l})$ — множество гладких участков границы Γ области Ω. В скобках указан типичный элемент множества. Принятые обозначения являются теоретическими. При практических вычислениях все КЭ и гладкие участки граней нумеруются подряд.

Определим пространства

$$\bar V=\prod_K H^m(K);\quad V_h=R^{N(h)};\quad X_h=\prod_K P_h^K\subset V;$$

$$H_T=\prod_K\prod_{\partial K_r}\prod_{\partial K_{r,l}}\prod_{j=0}^{m-1}L_2(\partial K_{r,l});$$

$$\tilde H^{\perp}=\Big\{f\in H_T\mid \forall\,\Gamma_{r,l}\in M(\Gamma_{r,l})\quad f^1_{r,l,j}=-(-1)^j f^2_{r,l,j};$$

$$\forall\Gamma^*_{r,l}\in M(\Gamma^*_{r,l})\quad f^*_{r,l,j}=0;\quad 0\leqslant j\leqslant m-1\Big\},$$

где $H^m(K)$ – пространства Соболева; P_h^K – некоторые конечномерные пространства; индексами 1 и 2 обозначены функции, относящиеся к смежным КЭ K^1 и K^2.

Определим оператор продолжения p_h: $u_h\in V_h\to p_h u_h\in X_h$ и оператор следа для разбиения области

$$\bar\gamma=\prod_K\prod_{\partial K_r}\prod_{\partial K_{r,l}}\prod_{j=0}^{m-1}\gamma^K_{r,l,j},$$

где $\gamma^K_{r,l,j}$ – оператор дифференцирования j-го порядка по нормали к гладкому участку $\partial K_{r,l}$ грани ∂K_r КЭ.

Необходимым и достаточным признаком внешних конечноэлементных аппроксимаций пространств Соболева $H^m(\Omega)$ является условие [2] $\forall g_h\in G_h$,

$$\forall p_h u_h\in X_h\qquad (g_h,\bar\gamma p_h u_h)_{H_T}=0, \tag{1}$$

где G_h – предельно плотное в пространстве $\tilde H^{\perp}$ семейство некоторых конечномерных подпространств.

Определим условия, которым должны удовлетворять функции из пространств $P_h^K\subset H^m(K)$ для того, чтобы выполнялось соотношение (1).

Перепишем соотношение (1) в виде

$$\left.\begin{aligned}&\forall g_h\in G_h,\forall p^1\in P^1,\forall p^2\in P^2,\\&(g_h,\bar\gamma p_h u_h)_{H_T}=\sum_{\Gamma_r}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\Gamma_r}(g_j^1\gamma_j^1 p^1+g_j^2\gamma_j^2 p^2)\,d\gamma=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где $g_j^K=\prod_{\partial K_r}\prod_{\partial K_{r,l}}g^K_{r,l,j}$: $0\leqslant j\leqslant m-1$; $p^1\in H^m(K^1)$, $p^2\in H^m(K^2)$, K^1 и K^2 – смежные КЭ.

Предположим, что носителями базисных функций $\{g_{j,k}\}$, $1\leqslant k\leqslant k_j$, $0\leqslant j\leqslant m-1$ пространства G_h являются подмножества межэлементных границ Γ_r разбиения τ. Тогда условие (2) принимает вид

$$\left.\begin{aligned}
&\forall \Gamma_r \in M(\Gamma_r), \forall p^1 \in P^1, \forall p^2 \in P^2,\\
&\int_{\Gamma_r} (g^1_{j,k}\,\gamma^1_j\,p^1 + g^2_{j,k}\,\gamma^2_j\,p^2)\,d\gamma = 0,\\
&1 \leqslant k \leqslant k_j,\ 0 \leqslant j \leqslant m-1.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Рассмотрим отдельный КЭ $K^1 \in \tau$ и смежные с ним КЭ $K^2,\dots,K^N$. Обозначим через G^K подпространство, натянутое на базисные функции $g_{j,k} \in G_h$ такие, что $\operatorname{supp}(g_{j,k}) \subset \partial K$.

Тогда из соотношения (3) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\partial K^1} (g^1_{j,t}\,\gamma^1_j\,p^1 + g^i_{j,t}\gamma^i_j\,p^i)\,d\gamma = 0,\\
&\forall p^i \in P^i, 1 \leqslant i \leqslant N;\ \ 1 \leqslant t \leqslant t_K;\ \ 0 \leqslant j \leqslant m-1,
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где $\{g_{j,t}\}$, $1 \leqslant t \leqslant t_K$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ – базис пространства G^K.

Для того чтобы условие (4) выполнялось, в пространствах P^i, $1 \leqslant i \leqslant N$ должны существовать функции такие, что для некоторых произвольных чисел $\alpha_{j,t}$, $1 \leqslant t \leqslant t_K$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$

$$\int_{\partial K^1} g^i_{j,t}\gamma^i_j\ p^i d\gamma = \alpha_{j,t},\ 1 \leqslant i \leqslant N. \quad (5)$$

Так как базисные функции $g_{j,t}$, $1 \leqslant t \leqslant t_K$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$ фиксированы, то интегралы (5) являются непрерывными линейными формами на пространстве $H^m(K)$ (здесь и далее используем обозначение K вместо K^1). Обозначим их символами $\varphi(p)$, введем новую индексацию и перепишем равенства (5) в виде

$$\varphi_i\ (p) = \alpha_i,\ 1 \leqslant i \leqslant M, \quad (6)$$

где $M = \operatorname{card}(\Sigma_K)$, Σ_K – множество функционалов $\varphi(p)$.

Структура базиса КЭ определяется по следующей теореме.

Теорема. Пусть множество линейных форм φ_i, $1 \leqslant i \leqslant M$, определенных в соотношениях (5), линейно независимо на пространстве P^K, $\dim(P^K) = N$. Тогда P^K можно представить в виде прямой суммы двух подпространств

$$P^K = P_\Sigma \oplus P_Z, \quad (7)$$

где

$$P_Z = \left\{p \in P^K \mid \varphi_i\ (p) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant M\right\}; \quad (8)$$

P_Σ – некоторое дополнение к P_Z, изоморфное фактор-пространству P^K/P_Z.

В пространстве P_Σ существует базис $\left\{p_i^\Sigma\right\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, удовлетворяющий условию

$$\varphi_i\ (p_k^\Sigma) = \begin{cases} 1, i = k; \\ 0, i \neq k. \end{cases} \tag{9}$$

Любой элемент $p \in P^K$ однозначно представим в виде

$$p = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i\ (p)\ p_i^\Sigma + \sum_{k=1}^{N-M} a_k\,(p)\,p_k^Z\ , \tag{10}$$

где $a_k\ (p)$, $1 \leqslant k \leqslant N - M$ — некоторые коэффициенты; $\left\{p_k^Z\right\}$, $1 \leqslant k \leqslant N - M$— некоторый базис пространства P_Z.

Доказательство. Покажем, что отображение $F\colon P^K \to R^M$, определенное формулой $F\ (p) = (\varphi_1\ (p),\ldots,\varphi_M\ (p))$, сюрьективно. Действительно, если предположить обратное, то существует вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \in R^M, \alpha \neq$ $\neq 0$, такой, что $\sum_{i=1}^{M} \alpha_i\,\varphi_i\ \ (p) = 0$ для любого $p \in P^K$, т.е. функционалы φ_i линейно зависимы, что противоречит принятому условию.

Выберем в пространстве R^M канонический базис из векторов f_k, $1 \leqslant k \leqslant M$, у которых k-я компонента равна единице, остальные компоненты нулевые. В силу сюрьективности отображения F для каждого f_k можно найти элемент $p_k^\Sigma \in P^K$ такой, что $F\ (p_k^\Sigma) = f_k$. Тогда существует последовательность линейно независимых элементов $p_1^\Sigma\ ,\ldots, p_M^\Sigma \in P^K$, удовлетворяющих условию (9).

Обозначим через P_Σ подпространство, натянутое на элементы p_i^Σ, $1 \leqslant i \leqslant M$. Тогда подпространство P_Z, определяемое характеризацией (8), является дополнением к подпространству P_Σ. Действительно, любой элемент $p \in P^K$ можно представить в виде $p = p_1 + p_2$, где $p_1 = \sum_{i=1}^{M} \varphi_i\ \ (p)\ p_i^\Sigma \in P_\Sigma$; $p_2 = p - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i\ (p)\ p_i^\Sigma \in P_Z$. Представление единственно, так как если $0 = p_1 + p_2$ $(p_1 \in P_\Sigma, p_2 \in P_Z)$, то $p_2 = \sum_{i=1}^{M} c_i\,p_i^\Sigma$, $\varphi_k\,(p_2) = \sum_{i=1}^{M} c_i\,\varphi_k\,(p_i^\Sigma)$. Отсюда $c_k = \varphi_k\,(p_2) = 0$, $1 \leqslant k \leqslant M$, т.е. $p_2 = 0, p_1 = 0$. Таким образом, выражения (7) и (10) справедливы.

Назовем функционалы φ_i, $1 \leqslant i \leqslant M$ и a_k, $1 \leqslant k \leqslant N - M$ соответственно граничными и внутренними степенями свободы КЭ.

Требование линейной независимости набора функционалов $\varphi_i\ \ (p)$ на пространстве P^K эквивалентно требованию P^K-полисольвентности множества Σ_K граничных степеней свободы КЭ, которое формулируется следующим образом: для любого набора α_i в пространстве P^K существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая условиям (6). В частном случае, когда $\dim\ (P^K) = \mathrm{card}\ (\Sigma_K)$, определение P^K-полисольвентности совпадает с классическим определением

P^K-унисольвентности множества Σ_K [1, 3]. В случае, когда $\dim(P^K) > \operatorname{card}(\Sigma_K)$, множество Σ_K является P^K-полисольвентным и P_Σ-унисольвентным. При этом в пространстве P^K может существовать не одно, а множество подпространств P_Σ, на которых множество Σ_K P_Σ-унисольвентно.

Окончательно определим согласованный по подпространству внешний КЭ как четверку множеств (K, G^K, P^K, P_Σ), где K — замкнутая область в R^n с непустым множеством внутренних точек и кусочно-гладкой липшицевой границей; G^K — конечномерное пространство функций, определенных на границе области K; P^K — конечномерное пространство определенных на области K функций, на котором P^K-полисольвентно множество Σ_K граничных степеней свободы КЭ; P_Σ — подпространство пространства P^K, на котором P_Σ-унисольвентно множество Σ_K.

2. Рассмотрим построение базисов $\{p_i^\Sigma\}$, $\{p_k^Z\}$, $1 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant k \leqslant N-M$ из приведенной выше теоремы.

Пусть $\{p_k\}$, $1 \leqslant k \leqslant N$ — базис пространства P^K. Справедливы соотношения:

$$\forall p \in P \quad p = \sum_{k=1}^{N} b_k p_k; \tag{11}$$

$$\varphi_i(p) = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_i(p_k), \quad 1 \leqslant i \leqslant M, \tag{12}$$

где b_k — некоторые коэффициенты.

В матричной форме соотношения (12) имеют вид

$$Rb^{\mathrm{T}} = \varphi^{\mathrm{T}}, \tag{13}$$

где R — матрица размерности $M \times N$; $b = (b_k)_{k=1}^{N}$ — вектор коэффициентов; $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^{M}$ — вектор граничных степеней свободы КЭ.

Перепишем уравнение (13) в виде

$$R_\Sigma b_\Sigma^{\mathrm{T}} + R_Z b_Z^{\mathrm{T}} = \varphi^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

где R_Σ и R_Z — клетки размерности $M \times M$ и $M \times (N-M)$ соответственно.

Пусть матрица R_Σ — неособенная. Этого всегда можно добиться перестановкой столбцов матрицы R в случае, если ранг матрицы R равен M, т.е. если множество граничных степеней свободы КЭ P-полисольвентно. Умножая уравнение (14) слева на матрицу R_Σ^{-1}, получим

$$b_\Sigma^{\mathrm{T}} = R_\Sigma^{-1} \varphi^{\mathrm{T}} - R_\Sigma^{-1} R_Z b_Z^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

Перепишем выражение (11) в матричной форме

$$p = \Phi_1 b_\Sigma^{\mathrm{T}} + \Phi_2 b_Z^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

где $\Phi_1 = (p_k)_{k=1}^{M}$; $\Phi_2 = (p_k)_{k=N-M+1}^{N}$.

Подставляя выражение (15) в (16), получим разложение элемента $p \in P$ по элементам нового базиса

$$p = \Phi_1 R_\Sigma^{-1} \varphi^{\mathrm{T}} + (\Phi_2 - \Phi_1 R_\Sigma^{-1} R_z)\, b_Z^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

Сравнивая представления (9) и (17), видим, что базисные функции пространств P_Σ и P_Z определяются выражениями соответственно

$$p_k^\Sigma = \sum_{i=1}^{M} p_i r_{i,k}^\Sigma, \quad 1 \leqslant k \leqslant M;$$

$$p_j^Z = p_{j+M} - \sum_{l=1}^{M} p_l \sum_{k=1}^{M} r_{l,k}^\Sigma r_{k,j}^Z, \quad 1 \leqslant j \leqslant N-M,$$

где $r_{i,k}^\Sigma$, $1 \leqslant i \leqslant M$, $1 \leqslant k \leqslant M$ – элементы матрицы R_Σ^{-1}; $r_{k,j}^Z$, $1 \leqslant k \leqslant M$, $1 \leqslant j \leqslant N-M$ – элементы матрицы R_Z.

3. В качестве иллюстрации эффективности метода ниже представлены результаты решения задачи Вебера о концентрации напряжений при кручении круглого вала с полукруглой выточкой, полученные с использованием согласованных по подпространству КЭ. Задача имеет точное решение [4].

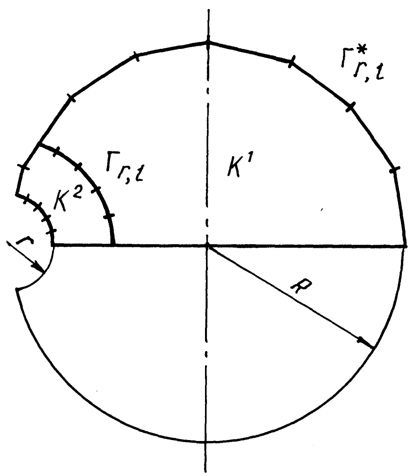

Рис. 1. Разбиение сечения вала на конечные элементы

На рис. 1 показано разбиение половины сечения вала на два КЭ, представляющих собой многоугольники, вписанные в контур сечения. Расчеты проведены при следующем выборе пространств:

$$\forall K \in \tau \quad P^K = P_k(K),$$

$$G^K = \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} P_0(\partial K_{r,l}),$$

где через $P_i(\cdot)$ обозначено пространство полиномов i-й степени, определенных на соответствующей области.

Отношение радиусов вала и выточки $R/r = 5$.

При решении задачи в процессе формирования матриц жесткости внутренние степени свободы КЭ выражались через граничные степени свободы (конденсировались). Поэтому порядок разрешающей системы линейных алгебраических уравнений для данной задачи определялся числом гладких участков $\Gamma_{r,l}$ межэлементной границы и для выбранного разбиения был равен пяти. Машинное время расчета одного варианта на ЭВМ ЕС 1035 составило от трех до пяти минут.

Сопоставление результатов расчета с точным решением задачи показало, что для порядков аппроксимации $k = 4;\ 5;\ 6$ функции напряжений на КЭ разница между полученным и точным значением коэффициента концентрации касательных напряжений на дне выточки оказалась равной $\epsilon = -57,\ -10{,}5;\ +2{,}7\ \%$ (соответственно). Таким образом, при высоких порядках аппроксимации функции в пределах КЭ высокая точность расчета напряжений может быть достигнута при весьма грубом разбиении области на КЭ.

Предлагаемый метод применялся и показал высокую эффективность при решении других задач механики, в частности задач изгиба пластин.

ЛИТЕРАТУРА

1. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М., 1980. — 512 с. 2. А п а н о в и ч В. Н. Признак внешних аппроксимаций конечными элементами обобщенных решений краевых задач механики // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1987.—Вып.14.—С.47—54. 3. К о р н е е в В.Г. Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. — Л., 1977. — 206 с. 4. Прочность. Устойчивость. Колебания: Справочник. — М., 1968. — Т. 2. — 590 с.

УДК 539.3

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЩИХ ФОРМУЛ СТАТИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА

Ниже приводится новое представление компонентов напряжений и перемещений для трехмерного ортотропного тела через произвольную квазигармоническую функцию при стационарном распределении температуры.

Пусть u, v, w — компоненты перемещений, отнесенные к осям декартовых координат x, y, z; σ_{ij} и e_{ij} — компоненты напряжений и деформаций, удовлетворяющие уравнениям закона Гука [1]