

Таким образом, по сравнению с напряжениями, вычисляемыми по элементарной теории сопротивления материалов, эти напряжения больше, чем в 5 раз, для цилиндра, у которого площадь торцов равна боковой поверхности $h = R$, почти в 2 раза для кубообразного цилиндра $h = 2R$ и почти не отличаются от напряжений для короткого цилиндра, высота которого равна двум диаметрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. — Л., 1983. — 231 с.
2. Крушевский А.Е., Чурakov В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1975. — Вып. 2. — С. 91–102.
3. Крушевский А.Е. Сжатие (растяжение) упругого прямоугольника при заданных на контуре напряжениях // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1986. — Вып. 13. — С. 13–18.

УДК 539.3

Н.Я. БОЙКО

СЖАТИЕ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ЗАДАННОЙ НА ЕГО ТОРЦАХ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЭПЮРЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Решение задач о равновесии упругого прямоугольного параллелепипеда при большинстве граничных условий сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Для некоторых типов граничных условий его удастся записать в явной форме [1]. Причем решение строят, удовлетворяя уравнениям Ламе и по возможности части граничных условий или используя общие решения уравнений Ламе в какой-либо форме.

Приведенное ниже решение задачи с согласованными краевыми условиями на четырех гранях получено модифицированным методом Канторовича–Власова на основании вариационного принципа Лагранжа. Суть модификации состоит в заблаговременном удовлетворении естественных для вариационного принципа Лагранжа условий равновесия внутри тела и на его границе.

Итак, имеем следующие краевые условия:

$$\text{при } z = \pm h/2 \quad \tau = \tau_{xz} = 0; \quad w_z^+ = \frac{4lx^2}{a^2} - l - w_0;$$

$$w_z^- = - \left(\frac{4lx^2}{a^2} - l - w_0 \right); \quad (1)$$

$$\text{при } y = \pm b/2 \quad v = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0; \quad (2)$$

$$\text{при } x = \pm a/2 \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0, \quad (3)$$

где w_z^+ , w_z^- — нормальные перемещения на гранях $z = h/2$ и $z = -h/2$ (соответственно); l , w_0 — параметры уравнения параболы.

Искомые перемещения точек упругого тела представим в виде рядов сначала по переменной z с учетом симметрии решения в классе функций основной тригонометрической системы и полиномов Лежандра.

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} U_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} ; \\ v &= V_0 + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) V_2 + \sum_{i=1}^{\infty} V_{ic} \cos \frac{2\pi iz}{h} ; \\ w &= \frac{2z}{h} W_1 + \sum_{i=1}^{\infty} W_{is} \sin \frac{2\pi iz}{h} , \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $U_0, U_2, U_{ic}, V_0, V_2, V_{ic}, W_1, W_{is}$ — функции переменных u и x .

Подставляя ряды (4) в краевые условия (1), определим функции W_1, U_2, V_2 : $W_1 = 4lx^2/a^2 - l - w_0$; $U_2 = -4hlx/(3a^2)$, $V_2 = 0$.

После точного удовлетворения краевых условий (1) на гранях $z = \pm h/2$ зависимость обобщенных перемещений $U_0, U_{ic}, V_0, V_{ic}, W_{is}$ от новой переменной y представим опять в классе функций основной тригонометрической системы и полиномов Лежандра. Например:

$$U_0 = U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) U_{02} + \sum_{k=1}^{\infty} U_{0kc} \cos \frac{2\pi ky}{b} .$$

Удовлетворение рядов методом ортогонализации краевым условиям (2) приводит к построению уравнений равновесия на поверхности тела.

Совместное решение уравнений равновесия на поверхности и внутри тела, полученных при удовлетворении искомых рядов уравнению равновесия элементарного столбика тела [2] обеспечивает получение дифференциальных уравнений равновесия по оставшейся переменной x . По структуре уравнений равновесия можно выявить собственные функции задачи и записать ее решение в полной системе функций по переменной x .

Окончательное решение задачи (1) — (3) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= U_{00} + \frac{1}{2} \left(12 \frac{z^2}{h^2} - 1 \right) U_2 + \sum_{i=1}^{\infty} U_{ic0} \cos \frac{2\pi iz}{h} ; \\ w &= \frac{2z}{h} W_1 + \sum_{i=1}^{\infty} W_{iso} \sin \frac{2\pi iz}{h} ; \quad v = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U_{00} &= -\frac{2\gamma_2}{\gamma h} \left(\frac{4lx^3}{3d^2} - lx - w_0x \right) ; \\ W_{iso} &= B_{io} \operatorname{ch} \frac{2\pi ix}{h} + C_{io} x \operatorname{sh} \frac{2\pi ix}{h} + \frac{4\gamma_2 h^2 (-1)^i}{\gamma \pi^3 i^3 a^2} ; \end{aligned}$$

$$U_{ico} = - \left[B_{io} - \frac{h(\gamma+1)}{2\pi i(\gamma-1)} C_{io} \right] \operatorname{sh} \frac{2\pi i x}{h} - C_{io} x \operatorname{ch} \frac{2\pi i x}{h};$$

$$\gamma = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}; \quad \gamma_2 = \frac{2\nu}{1-2\nu};$$

ν – коэффициент Пуассона. Постоянные B_{io} , C_{io} определяются при удовлетворении краевых условий (3) методом ортогонализации.

Полученное решение проверяем на удовлетворение уравнениям Ламе.

В параллелепипеде имеет место плоская деформация, одинаковая в плоскостях $y = \text{const}$.

Как и в работе [1], обозначим равнодействующую, приходящуюся на полосу грани $z = a/2$ шириной в единицу масштаба, через $P/2$, т.е.

$$\int_{-a/2}^{a/2} \sigma_z dx = -P/2 \quad \text{при } z = a/2. \quad (5)$$

Примем $l = 0,075P/(2G)$, где G – модуль сдвига. Тогда из равенства (5) определим w_0 .

В [1] приведены результаты вычислений безразмерных величин $a\sigma_z/P$, $a\sigma_x/P$, $a\tau_{zx}/P$ в точках сетки с шагом, равным $1/8$ длины ребра куба (в плоскости деформации).

Т а б л и ц а 1

Результаты численного решения задачи (1) ... (3)*

z	0	$a/8$	$a/4$	$3/8a$	$a/2$
$a\sigma_z/P$					
$a/2$	-0,59/-0,63	-0,58/-0,61	-0,53/-0,57	-0,44/-0,48	-0,35/-0,27
$a/4$	-0,57/-0,61	-0,56/-0,60	-0,52/-0,55	-0,45/-0,48	-0,37/-0,41
0	-0,64/-0,60	-0,54/-0,58	-0,51/-0,54	-0,46/-0,49	-0,42/-0,46
$a\sigma_x/P$					
$a/2$	-0,11/-0,11	-0,11/-0,11	-0,09/-0,09	-0,04/-0,06	0
$a/4$	0,02/0,02	0,02/0,02	0,01/0,01	0,01/0,01	0
0	0,04/0,04	0,04/0,04	0,03/0,03	0,01/0,01	0
$a\tau_{zx}/P$					
$a/2$	0	0	0	0	0
$a/4$	0	0,01/0,01	0,02/0,02	0,03/0,03	0
0	0	0	0	0	0

* В числителе – результаты, полученные по методике Г.М. Валова, в знаменателе – по методике, предложенной в данной статье.

Характер изменения напряжений во всем кубе совпадает с выявленным в работе [1]: в средней части куба существует зона растягивающих нормальных напряжений σ_x . Выше и ниже этой зоны напряжения σ_x сжимающие. Наибольшее касательное напряжение в части куба, находящейся в первом октанте, отмечается около линии $x = 3/8 \cdot a, z = 3/8 \cdot a$ (табл. 1).

Ряды быстросходящиеся. Достаточно пяти членов ряда, чтобы получить результаты, совпадающие с результатами работы [1] по значениям напряжений σ_x и τ_{xz} в соответствующих точках. Значения напряжений σ_z в сравниваемых точках отличаются не более чем на 7%. При десяти членах ряда получаем такой же результат. Время счета на ЭВМ 5 мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. В а л о в Г.М. Об одной задаче о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим. — 1959. — № 3. — С. 35—41.
2. К р у ш е в с к и й А.Е. Общее решение задачи о равновесии упругого цилиндрического тела // 25-я науч.-техн. конф. БПИ: Материалы секции теор. и прикл. механики. — Мн., 1969. — С. 3—12.

УДК 539.3:519.63

В.Н. АПАНОВИЧ

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВНЕШНИХ АППРОКСИМАЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Важнейшим этапом разработки схем метода конечных элементов (КЭ) является построение конечных элементов, так как аппроксимативные качества КЭ оказывают решающее влияние на эффективность той или иной схемы в целом [1]. В настоящей статье дается метод построения КЭ произвольной геометрии для внешних аппроксимаций обобщенных решений краевых задач механики.

1. Пусть задано разбиение τ липшицевой области $\bar{\Omega} \in R^n$ на КЭ K , удовлетворяющее условиям: а) $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \tau} K$; б) $\forall K \in \tau$ область K замкнута и множество $\overset{\circ}{K}$ ее внутренних точек непусто; в) $\forall K^1, K^2 \in \tau \quad K^1 \cap K^2 = \emptyset$; г) $\forall K \in \tau$ граница ∂K липшицева, кусочно-гладкая. Следуя [2], определим грань КЭ как связный участок ∂K_r границы ∂K , отделяющий данный КЭ от смежного с ним и являющийся кусочно-гладким многообразием размерности $n-1$. Обозначим: $M(\partial K_r)$ — множество граней КЭ; $M(\partial K_{r,l})$ — множество гладких участков $\partial K_{r,l}$ грани ∂K_r ; $M(\Gamma_r)$ — множество межэлементных границ разбиения τ ; $M(\Gamma_{r,l})$ — множество гладких участков межэлементных границ разбиения; $M(\Gamma_{r,l}^*)$ — множество гладких участков границы Γ области Ω . В скобках указан типичный элемент множества. Принятые обозначения являются теоретическими. При практических вычислениях все КЭ и гладкие участки граней нумеруются подряд.