УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ (СЖАТИЕ) УПРУГОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ЗАДАННЫХ НА ЕГО ПОВЕРХНОСТИ НАПРЯЖЕНИЯХ

Как известно, задача о равновесии упругого конечного цилиндра при несогласованных краевых условиях в замкнутом виде пока не решена. Наиболее полно состояние проблемы о равновесии цилиндра и обзор литературы изложены в монографии [1]. При этом отмечены два основных подхода к решению данной задачи: метод однородных решений и метод суперпозиции. Достоинство первого состоит в том, что заранее точно выполняются краевые условия на части поверхности цилиндра за счет нахождения корней характеристического уравнения. Выполнение краевых условий на остальной части поверхности приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений. Задача построения замкнутого решения методом однородных решений требует разложения функции в неортогональный ряд собственных функций, зависящих от комплексных корней трансцендентного характеристического уравнения. Хотя способы разложения функции в неортогональные ряды предложены [2], однако выяснить характер сходимости полученных рядов (особенно на границе) не представляется возможным из-за сильного осциллирования.

Метод суперпозиции использует набор решений, соответствующих равновесию бесконечного слоя и бесконечного цилиндра, а краевые условия выполняются в интегральной форме на всей поверхности цилиндра. Вопрос о сходимости полученных рядов решается на основании исследования бесконечных систем алгебраических уравнений [1]. При этом прежде всего возникает вопрос о полноте метода суперпозиции, который отпадает, если строить решение задачи в виде полного стандартного ряда функций [3].

В данной статье методом, изложенным в [3], построено решение задачи о растяжении (сжатии) упругого конечного цилиндра нормальной нагрузкой в замкнутом виде, т.е. в виде рядов с известными коэффициентами. Формулы для упругих перемещений и напряжений в операторной форме имеют вид:

$$u=\frac{r}{2(3\gamma-4)G}\left(\frac{\gamma}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} p\,dz-\frac{\gamma_2}{R^2}\int\limits_0^R qr\,dr\right)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} A_m\left\{\left[\operatorname{ch}\frac{\lambda_m z}{R}+\frac{(\gamma-1)\lambda_m}{R}\left(z\operatorname{sh}\frac{\lambda_m z}{R}-\frac{h}{2}\operatorname{ch}\frac{\lambda_m z}{R}\operatorname{cth}\frac{\lambda_m h}{2R}\right)\right]\right.\times$$

$$\times\frac{J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{2R}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(\gamma-1)J_0(\lambda_m)\cos\pi n\cos\frac{2\pi nz}{h}}{\pi n\Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)\left(\frac{\lambda_m h}{2\pi nR}+\frac{2\pi nR}{\lambda_m h}\right)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{\gamma h I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{2(\gamma-1)\pi nR}+\frac{I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)-\right.$$

$$- \frac{r}{R} I_0 \left(\frac{2\pi nr}{h}\right)\Big]\Big\} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{\gamma h\, I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{2(\gamma-1)\pi nR} +$$

$$+ \frac{I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) - \frac{r}{R} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)\Big] \times$$

$$\times \frac{\cos\frac{2\pi nz}{h} \int_{-h/2}^{h/2} p \cos\frac{2\pi nz}{h}\, dz}{\pi n \Delta_3 G I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} ;$$

$$w = \frac{z}{(3\gamma-4)G} \Big[\frac{(\gamma-1)}{R^2} \int_0^R qr dr - \frac{\gamma_2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} pdz \Big] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \Big\{ \Big[\gamma \operatorname{sh}\frac{\lambda_m z}{R} - \frac{(\gamma-1)\lambda_m}{R} \Big(z \operatorname{ch}\frac{\lambda_m z}{R} -$$

$$- \frac{h}{2} \operatorname{sh}\frac{\lambda_m z}{R} \operatorname{cth}\frac{\lambda_m h}{2R}\Big) \frac{J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{2R}} -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(\gamma-1) J_0(\lambda_m) \cos\pi n \sin\frac{2\pi nz}{h}}{\pi n \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)\left(\frac{\lambda_m h}{2\pi nR} + \frac{2\pi nR}{\lambda_m h}\right)^2} \Big[\frac{r}{R} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) -$$

$$- \frac{I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) + \frac{\gamma h\, I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{2(\gamma-1)\pi nR} \Big]\Big\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \Big[\frac{r}{R} I_1\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) - \frac{I_0\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)} I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right) +$$

$$+\frac{\gamma h\, I_0\left(\frac{2\pi nr}{h}\right)}{2(\gamma-1)\pi nR}\Big]\ \frac{\sin\frac{2\pi nz}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} p\cos\frac{2\pi nz}{h}\,dz}{\Delta_3 \pi nG I_1\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)};$$

$$A_m=\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda_m h}{R}-1\right)}{2(\gamma-1)G\lambda_m R\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{R}+\frac{\lambda_m h}{R}\right)J_0^2(\lambda_m)}\Big[\int\limits_0^R qrJ_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)dr-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h\cos\pi nJ_0(\lambda_m)}{\pi^2n^2\Delta_3\left(\frac{\lambda_m h}{2\pi nR}+\frac{2\pi nR}{\lambda_m h}\right)^2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}2p\cos\frac{2\pi nz}{h}\,dz\Big]+$$

$$+\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda_m h}{R}-1\right)}{2(\gamma-1)GR\lambda_m\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{R}+\frac{\lambda_m h}{R}\right)J_0^2(\lambda_m)\left[1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(k,m,n)\right]}\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f(k,m,n)\Big[\int\limits_0^R qrJ_0\left(\frac{\lambda_k r}{R}\right)dr-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h\cos\pi nJ_0(\lambda_k)\int\limits_{-h/2}^{h/2}2p\cos\frac{2\pi nz}{h}\,dz}{\pi^2n^2\Delta_3\left(\frac{\lambda_k h}{2\pi nR}+\frac{2\pi nR}{\lambda_k h}\right)^2}\Big];$$

$$f(k,m,n)=\frac{8h\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda_k h}{R}-1\right)J_0^{-1}(\lambda_k)J_0(\lambda_m)\left(\frac{\lambda_k h}{2\pi nR}+\frac{2\pi nR}{\lambda_k h}\right)^{-2}}{\pi^2n^2\lambda_m R\Delta_3\left(\frac{\lambda_m h}{2\pi nR}+\frac{2\pi nR}{\lambda_m h}\right)^2\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_k h}{R}+\frac{\lambda_k h}{R}\right)};$$

$$\Delta_3=\frac{I_0^2\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}{I_1^2\left(\frac{2\pi nR}{h}\right)}-\frac{\gamma h^2}{4(\gamma-1)\pi^2n^2R^2}-1\ .$$

В приведенных выше формулах J_0, J_1, I_0, I_1 — функции Бесселя; λ_m — корни уравнения $J_1(\lambda_m) = 0$; h, R — высота и радиус цилиндра, q, p — поверхностная нагрузка на его торцах и боковой поверхности.

Анализ формул для напряжений, полученных на основе закона Гука, показывает, что касательные напряжения τ_{rz} равны нулю на всей поверхности цилиндра, т.е. $\tau_{rz} = 0$ при $r = R$ и $z = \pm h/2$, нормальные напряжения σ_r при $r = R$ равны заданным при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_r = p$. Условие нагружения на торцах выполняется в интегральной форме

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^R \sigma_z r J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) dr = \int_0^R \frac{qr}{2} J_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) dr.$$

Это означает, что в соответствии с основной леммой вариационного исчисления и нормальные напряжения σ_z равны заданным при $m, n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty, n\to\infty} \sigma_z = q/2$.

В качестве примера определим напряжения σ_z в центре цилиндра при сжатии его двумя сосредоточенными силами $Q/2$, приложенными к торцам цилиндра вдоль его оси. Формула для напряжений σ_z при $r = 0$, $z = 0$ записывается в виде:

$$\sigma_z = \frac{Q}{2\pi R^2} + \frac{Q}{2\pi R^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{2R} + \frac{\lambda_m h}{2R}\operatorname{ch}\frac{\lambda_m h}{2R}}{\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right) J_0^2(\lambda_m)\Delta} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\cos\pi n \operatorname{sh}^2 \frac{\lambda_m h}{2R}\left[h I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) - \pi n R I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)\right]}{\Delta \pi n \lambda_m h \Delta_3 I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)\left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2\left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R}\right) J_0(\lambda_m)} \right\},$$

где

$$\Delta = 1 - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8h\left(\operatorname{ch}\frac{\lambda_k h}{R} - 1\right) J_0^{-1}(\lambda_k) J_0(\lambda_m)\left(\frac{\lambda_k h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_k h}\right)^{-2}}{\pi^2 n^2 \lambda_m R \Delta_3 \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi R n} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h}\right)^2 \left(\operatorname{sh}\frac{\lambda_k h}{R} + \frac{\lambda_k h}{R}\right)}.$$

Вычисление напряжений σ_z в центре цилиндра для различных отношений h/R показывает, что при $h/R = 1$ $\sigma_z = 2{,}64\, Q/(\pi R^2)$, при $h/R = 2$ $\sigma_z = 0{,}94\, Q/(\pi R^2)$, при $h/R = 4$ $\sigma_z = 0{,}502\, Q/(\pi R^2)$ $(m, n = 1, 2, 3)$.

Таким образом, по сравнению с напряжениями, вычисляемыми по элементарной теории сопротивления материалов, эти напряжения больше,чем в 5 раз, для цилиндра, у которого площадь торцов равна боковой поверхности $h = R$, почти в 2 раза для кубообразного цилиндра $h = 2R$ и почти не отличаются от напряжений для короткого цилиндра, высота которого равна двум диаметрам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байда Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. — Л., 1983. — 231 с. 2. Крушевский А.Е., Чураков В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1975. — Вып. 2. — С. 91—102. 3. Крушевский А.Е. Сжатие (растяжение) упругого прямоугольника при заданных на контуре напряжениях // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1986. — Вып. 13. — С. 13—18.

УДК 539.3

Н.Я. БОЙКО

СЖАТИЕ УПРУГОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ПРИ ЗАДАННОЙ НА ЕГО ТОРЦАХ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЭПЮРЕ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Решение задач о равновесии упругого прямоугольного параллелепипеда при большинстве граничных условий сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Для некоторых типов граничных условий его удается записать в явной форме [1]. Причем решение строят, удовлетворяя уравнениям Ламе и по возможности части граничных условий или используя общие решения уравнений Ламе в какой-либо форме.

Приведенное ниже решение задачи с согласованными краевыми условиями на четырех гранях получено модифицированным методом Канторовича—Власова на основании вариационного принципа Лагранжа. Суть модификации состоит в заблаговременном удовлетворении естественных для вариационного принципа Лагранжа условий равновесия внутри тела и на его границе.

Итак, имеем следующие краевые условия:

$$\text{при } z = \pm h/2 \quad \tau = \tau_{xz} = 0; \quad w_z^+ = \frac{4lx^2}{a^2} - l - w_0;$$

$$w_z^- = -\left(\frac{4lx^2}{a^2} - l - w_0\right); \tag{1}$$

$$\text{при } y = \pm b/2 \quad v = 0; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy} = 0; \tag{2}$$

$$\text{при } x = \pm a/2 \quad \sigma_x = \tau_{yx} = \tau_{zx} = 0, \tag{3}$$

где w_z^+, w_z^- — нормальные перемещения на гранях $z = h/2$ и $z = -h/2$ (соответственно); l, w_0 — параметры уравнения параболы.