При последовательной замене каждых 10 массовых долей смолы ЭД-20 дибутилфталатом коэффициент неньютоновского поведения состава постепенно увеличивается (при 30 и 40 долях пластификатора достигает единицы), резко уменьшается исходная мера консистенции. Замена 10, 20, 30 и 40 массовых долей смолы дибутилфталатом при температуре 20 °С вызывает уменьшение меры консистенции в 10, 54, 362 и 1016 раз соответственно.

Если для чистой смолы мера консистенции в интервале температур 20...48 °С понижается почти в 200 раз, то замена 10, 20, 30 и 40 ее долей пластификатором уменьшает этот показатель в 58, 38, 15 и 10 раз соответственно. Мера консистенции состава с соотношением массовых долей смолы и пластификатора 60:40 при температуре 48 °С составляет всего 0,2 $Н \cdot м^{-2} \cdot с^{n}$, что в 10 670 раз меньше этой основной вязкостной константы для чистой смолы при температуре 20 °С.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксенович Д.А., Верзал А.И., Ким А.Х. Реологические свойства пласт-растворов конденсационных структур // Исследование природных и синтетических полимерных материалов и их использование. — Мн., 1970. — С. 315—323. 2. Аксенович Д.А., Верзал А.И. Расчетные формулы для констант степенных реологических систем в ротационной вискозиметрии // Прикладная реология. — Мн., 1970. — С. 173—183.

3. МЕХАНИКА ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 539.3

В.А. ИБРАГИМОВ, В.А. НИФАГИН

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ НАГРУЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ

В работах [1, 2] на основе метода разложения по параметру нагружения [3] решены двухмерные осесимметричные задачи для плоскости с круговым отверстием при различном нагружении границы в рамках теории приращения деформаций для упрочняющего упругопластического тела. В общем случае получение любого члена разложения оказывается затруднительным, поэтому вопрос о сходимости рядов относительно параметра нагружения λ, представляющих решение, остается открытым.

В предлагаемой работе дается доказательство существования решения и сходимости метода разложения по параметру нагружения в задачах упругопластического деформирования стержней. В качестве физических уравнений приняты определяющие соотношения теории пластичности с упрочнением.

1. Пусть длинный круглый стержень постоянного поперечного сечения отнесен к цилиндрической системе координат φ, r, z, причем ось z совмещена с

осью симметрии стержня. Стержень подвергается скручиванию и растяжению крутящим моментом M и растягивающим усилием N соответственно. Предполагается, что из компонент напряжений только σ_z и $\sigma_{\varphi z}$ отличны от нуля.

Принимая обозначения статьи [1], запишем:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma = \frac{1}{3}\sigma_z ;\ S_z = \frac{2}{3}\sigma_z ;\ S_{11} = S_{22} = -\frac{1}{3}\sigma_z = -\frac{1}{2}S_z ;\\
&e_z = \epsilon_z ;\ e_{z\varphi} = \epsilon_{z\varphi} ;\\
&e_{11} = e_{22} = -\frac{1}{2}e_z ;\ \epsilon_{11} = \epsilon_{22} .
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Для несжимаемой среды θ равно нулю, следовательно, $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = -\epsilon_z/2$. Определяющие соотношения теории пластичности имеют вид [3]

$$\delta S_z = \delta e_z - A\delta\Gamma^2 e_z ;\ \delta S_{z\varphi} = \delta e_{z\varphi} - A\delta\Gamma^2 e_{z\varphi} , \qquad (2)$$

где $\Gamma^2 = 2e_{ij}\, e_{ij}$.

Перемещения точек стержня представим в виде

$$u_z = f(z,\lambda) ;\ u_\varphi = \omega(z,\lambda)\, r ,$$

где $f(z,\lambda)$, $\omega(z,\lambda)$ — искомые функции.

Очевидно, что

$$\left.\begin{aligned}
&\epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = f_z' ;\\
&\epsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{d\varphi}\right) = \frac{1}{2}\omega_z' r ;\\
&\Gamma^2 = 3f_z'^2 + \omega_z'^2 r^2 .
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Из (1) — (3) следует, что

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\delta\sigma_z = \delta f_z' - A\,(3\delta f'^2 + r^2\delta\omega_z'^2)\, f_z' ;\\
&\delta\sigma_{\varphi z} = \frac{1}{2} r\delta\omega_z' - A\,(3\delta f_z'^2 + r^2\delta\omega_z'^2)\,\frac{1}{2}\omega_z' r .
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Уравнения (4) проинтегрируем по области Σ поперечного сечения стержня, предварительно умножив второе уравнение на r. Одновременно учтем следующие представления для момента M, усилия N и площади поперечного сечения S:

$$M = \iint_\Sigma \sigma_{\varphi z}\, r ds ;\ N = \iint_\Sigma \sigma_z\, ds ;\ S = \iint_\Sigma ds . \qquad (5)$$

Введем также обозначения

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = \frac{3}{2} S\ ;\ a_2 = \frac{9}{2}\ AS;\ \ a_3 = \frac{3}{2} A \iint_\Sigma r^2 ds\ ; \\ &a_4 = \frac{1}{2} \iint_\Sigma r^2 ds\ ;\ a_5 = \frac{A}{2} \iint_\Sigma r^2\, ds;\ F(z,\lambda) = f'_z\ ; \\ &\Omega\ (z,\lambda) = \omega'_z\ . \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тогда, учитывая (5), (6), для неизвестных функций $F(z,\lambda)$ и $\Omega\ (z,\lambda)$ из уравнений (4) получим:

$$\begin{cases} \delta N = a_1 \delta F - (a_2 F \delta F^2 + a_3 F\, \delta\Omega^2)\ ; \\ \delta M = a_4 \delta\,\Omega - (a_3 \Omega\, \delta F^2 + a_5 \Omega\, \delta\,\Omega^2)\,. \end{cases} \tag{7}$$

Для получения статически определимой задачи присоединим к (7) уравнение равновесия стержня при данной системе нагрузок

$$\partial N/\partial z + T = 0, \tag{8}$$

где $T = T(z,\lambda)$ — заданная функция, определяемая касательным усилием τ на боковой поверхности стержня.

Из (8) следует, что

$$N(z,\lambda) = \int_{z_0}^{z} T(\eta,\lambda)\, d\eta\ .$$

Таким образом, полная система уравнений для данной упругопластической задачи примет вид:

$$\begin{cases} a_2 F \delta F^2 + a_3 F\ \delta\Omega^2 - a_1 \delta F = -\delta \int_{z_0}^{z} T(\eta,\lambda)\, d\eta\ ; \\ a_3 \Omega\, \delta\, F^2 + a_5\, \Omega \delta\, \Omega^2 - a_4 \delta\Omega = -\delta M(z,\lambda)\,. \end{cases} \tag{9}$$

Примем к (9) метод разложения по параметру нагружения. Функции F и Ω будем искать в виде

$$F(z,\lambda) = \sum_{k=1} F_k(z) \lambda^k,\ \Omega(z,\lambda) = \sum_{k=1} \Omega_k(z) \lambda^k. \tag{10}$$

Здесь и далее в качестве верхнего предела суммирования принимается бесконечность.

Тогда

$$F^2 = \sum_{n=2} b_n \lambda^n\ ;\ \ \Omega^2 = \sum_{n=2} c_n \lambda^n\ ; \tag{11}$$

$$b_n = \sum_{m=1}^{n-1} F_m(z) F_{n-m}(z),\ c_n = \sum_{m=1}^{n-1} \Omega_m(z)\ \Omega_{n-m}(z)\,. \tag{12}$$

Подставляя разложения (10) – (12) в (9), получим:

$$\begin{cases} a_2 \sum\limits_{k=1} F_k \lambda^k \sum\limits_{n=2} \chi_n \lambda^{n-1} d\lambda + a_3 \sum\limits_{k=1} F_k \lambda^k \sum\limits_{n=2} \xi_n \lambda^{n-1} d\lambda - \\ - a_1 \delta \left(\sum\limits_{k=1} F_k \lambda^k \right) = -\delta N; \\ a_3 \sum\limits_{k=1} \Omega_k \lambda^k \sum\limits_{n=2} \chi_n \lambda^{n-1} d\lambda + a_5 \sum\limits_{k=1} \Omega_k \lambda^k \sum\limits_{n=2} \xi_n \lambda^{n-1} d\lambda - \\ - a_4 \delta \left(\sum\limits_{k=1} \Omega_k \lambda^k \right) = -\delta M, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$\chi_n = n b_n; \quad \xi_n = n c_n. \tag{14}$$

Интегрируя соотношения (13) при нулевых начальных условиях, имеем:

$$\begin{cases} a_2 \sum\limits_{m=2} \left(\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{n=2}^{m} \chi_n F_{m+1-n} \right) \lambda^{m+1} + \\ + a_3 \sum\limits_{m=2} \left(\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{n=2}^{m} \xi_n F_{m+1-n} \right) \lambda^{m+1} - a_1 \sum\limits_{k=1} F_k \lambda^k = -N; \\ a_3 \sum\limits_{m=2} \left(\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{n=2}^{m} \chi_n \Omega_{m+1-n} \right) \lambda^{m+1} + \\ + a_5 \sum\limits_{m=2} \left(\dfrac{1}{m+1} \sum\limits_{n=2}^{m} \xi_n \Omega_{m+1-n} \right) \lambda^{m+1} - a_4 \sum\limits_{k=1} \Omega_k \lambda^k = -M. \end{cases} \tag{15}$$

Выражения (15) удобно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} N = a_1 F_1 \lambda + a_1 F_2 \lambda^2 - a_2 \sum\limits_{k=2} \left(F_k + R_k^{(1)} \right) \lambda^{k+1} - \\ - a_3 \sum\limits_{k=2} \left(F_k + P_k^{(1)} \right) \lambda^{k+1}; \\ M = a_4 \Omega_1 \lambda + a_4 \Omega_2 \lambda^2 - a_3 \sum\limits_{k=2} \left(\Omega_k + R_k^{(2)} \right) \lambda^{k+1} - \\ - a_5 \sum\limits_{k=2} \left(\Omega_k + P_k^{(2)} \right) \lambda^{k+1}, \end{cases} \tag{16}$$

где введены обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&R_k^{(1)}(z,\lambda) = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1} \chi_n F_{k-n}(z); \quad P_k^{(1)}(z,\lambda) = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1} \xi_n F_{k-n}(z); \\
&R_k^{(2)}(z,\lambda) = \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1} \chi_n \Omega_{k-n}(z); \quad P_k^{(2)}(z,\lambda) = \\
&= \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1} \xi_n \Omega_{k-n}(z).
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

В (16) учтено, что для первых приближений [1]

$$R_1^{(1)} = R_2^{(1)} = 0; \quad P_1^{(1)} = P_2^{(1)} = 0;$$

$$R_1^{(2)} = R_2^{(2)} = 0; \quad P_1^{(2)} = P_2^{(2)} = 0.$$

Далее рассмотрим виды нагружения в пространстве M, N, при которых возможны следующие разложения:

$$N(z,\lambda) = \sum_{k=1} N_k(z)\lambda^k; \quad M(z,\lambda) = \sum_{k=1} M_k(z)\lambda^k. \qquad (18)$$

Заметим, что в простейшем случае ряды (18) могут вырождаться в конечные суммы, например при простом нагружении.

Подставив (18) в (16), придем к соотношениям

$$\begin{cases} a_2(F_k + R_k^{(1)}) + a_3(F_k + P_k^{(1)}) = -N_k; \\ a_3(\Omega_k + R_k^{(2)}) + a_5(\Omega_k + P_k^{(2)}) = -M_k. \end{cases} \qquad (19)$$

Рекуррентные соотношения (19) при заданных разложениях (18) позволяют определить искомые коэффициенты рядов (10), т.е. решить задачу.

Для доказательства сходимости предлагаемого метода необходимо показать, что радиус сходимости рядов (10) относительно параметра λ положителен. Из равенств (19) с учетом (14), (17), (18) получим

$$\left.\begin{aligned}
&(a_2 + a_3)F_k = -N_k - \frac{a_2}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}(nF_m F_{n-m} F_{k-n}) - \\
&- \frac{a_3}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}(n\Omega_m \Omega_{n-m} F_{k-n});
\end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$(a_3+a_5)\,\Omega_k = -M_k - \frac{a_3}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}(nF_m F_{n-m} F_{k-n}) - $$
$$-\frac{a_5}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1}(n\,\Omega_m \Omega_{n-m}\,\Omega_{k-n}).$$

Получим верхнюю оценку коэффициентов F_k, Ω_k по естественной норме

$$\| F_k \| = \max_z | F_k |; \quad \| \Omega_k \| = \max_z | \Omega_k | \quad (k = 1, 2, 3...). \tag{21}$$

Из (20) и (21) следуют очевидные неравенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\| F_k \| \leqslant \frac{1}{a_2 + a_3}\Big(\| N_k \| + \frac{a_2}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1} n\|F_m\|\,\|F_{n-m}\|\,\|F_{k-n}\| + \\
&+ \frac{a_3}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1} n\|\Omega_m\|\,\|\Omega_{n-m}\|\,\|F_{k-n}\|\Big); \\
&\| \Omega_k \| \leqslant \frac{1}{a_3 + a_5}\Big(\| M_k \| + \frac{a_3}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1} n\|F_m\|\,\|F_{n-m}\|\,\|\Omega_{k-n}\| + \\
&+ \frac{a_5}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1} n\|\Omega_m\|\,\|\Omega_{n-m}\|\,\|\Omega_{k-n}\|\Big) \\
&(k = 3, 4, 5, ...).
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Для краткости обозначим также

$$\left.\begin{aligned}
&\max\left\{\|F_k\|, \|\Omega_k\|, \|N_{k+2}\|/(a_2+a_3)\right\} = C_k^{(1)}; \\
&\max\left\{\|F_k\|, \|\Omega_k\|, \|M_{k+2}\|/(a_3+a_5)\right\} = C_k^{(2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Поскольку для любого z $\| F_k \| \leqslant C_k^{(1)}$, $\| \Omega_k \| \leqslant C_k^{(2)}$, достаточно показать сходимость мажорирующих рядов, коэффициенты которых определяются рекуррентными соотношениями

$$C_k^{(i)} = C_{k-2}^{(i)} + \frac{1}{k}\sum_{n=2}^{k-1}\sum_{m=1}^{n-1} n\,C_m^{(i)}\,C_{n-m}^{(i)}\,C_{k-n}^{(i)} \quad (i = 1,2), \tag{24}$$

где учтены оценки (22), (23).

Соотношения (24) могут быть записаны в следующем виде:

$$C_k^{(i)} = C_{k-2}^{(i)} + \frac{2}{3} \sum_{a_1+a_2+a_3=k} C_{a_1}^{(i)} C_{a_2}^{(i)} C_{a_3}^{(i)} \quad (i=1,2). \tag{25}$$

Для оценки области сходимости мажорантных рядов

$$\sum_{k=1} C_k^{(1)} \lambda^k, \quad \sum_{k=1} C_k^{(2)} \lambda^k \tag{26}$$

рассмотрим вспомогательную задачу о представлении в виде степенного ряда решения $y(x)$ уравнения

$$y - x_0 f(y) = a, \tag{27}$$

где f — некоторая аналитическая функция.

Будем искать решение, которое стремится к a при условии, что x стремится к нулю. При достаточно малых значениях x функция y будет аналитической в точке $x = 0$. Следовательно, решение уравнения (27) можно искать в виде ряда:

$$y = \sum_{k=1} a_k x^k \; (a_1 \neq 0).$$

Решение указанной задачи дается формулами Бюрмана—Лагранжа [4] для обращенных степенных рядов

$$y = \sum_{k=1} \left[\frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\frac{1}{\psi^k(y)} \right) \right] \Big|_{x=0} \frac{x^k}{k!}, \tag{28}$$

где $\psi(y) = \sum_{k=1} a_k y^{k-1}$.

В частности, полагая

$$f(y) = y^3; \; x_0 = \frac{2}{3}; \; y = \sum_{k=1} C_k^{(i)} x^k \quad (i = 1, 2), \tag{29}$$

из (26), (28) и (29) получим следующие выражения для коэффициентов:

$$C_k^{(i)} = \frac{1}{k!} \lim_{y\to 0} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\sum_{n=0} (-1)^n \frac{k(k+1)\ldots(k+n-1)}{n!} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \times \right.$$

$$\left. \times\, y^{2n} \right). \tag{30}$$

После преобразований получим

$$C_{2m}^{(i)} = 0; \; C_{2m+1}^{(i)} = \frac{(3m)!}{(2m+1)!\,m!} \left(\frac{2}{3}\right)^m.$$

С другой стороны, нетрудно убедиться, что подстановка рядов (29) в уравнение (27) приводит к соотношениям

$$\sum_{k=1} C_k^{(i)} x^k - \frac{2}{3} \sum_{a_1+a_2+a_3=k} C_{a_1}^{(i)} C_{a_2}^{(i)} C_{a_3}^{(i)} x^k = a \ \ (i = 1,2), \qquad (31)$$

которые совпадают с равенствами (25) для коэффициентов $C_k^{(i)}$.

Все формальные преобразования справедливы в случае равномерной сходимости рядов в соотношениях (30), которая обеспечивается условием $|\frac{2}{3} y^2| < 1$, т.е. на любом промежутке в интервале $] -\sqrt{3/2}; \sqrt{3/2} [$.

Таким образом, мажорантные степенные ряды (31) для оценки разложений по степеням параметра нагружения примут вид $\sum\limits_{m=0} C_{2m+1}^{(i)} \lambda^{2m+1}$ с радиусом сходимости $r = \sqrt{2}/3$. Поэтому сходимость решения задачи обеспечивается по крайней мере для интервала $] -r, r [$.

2. Рассмотрим задачу об изгибе с кручением стержня. Пусть достаточно длинный круглый стержень постоянного поперечного сечения находится в упругопластическом состоянии под действием изгибающего момента M_2, который действует в одной из плоскостей симметрии, и крутящего момента M_3. Полярная система координат φ, r, z и совмещенная с ней прямоугольная система x_1, x_2, x_3 располагаются так же, как в задаче 1. Примем обычные статические и кинематические гипотезы:

$$\sigma_z \neq 0; \ \sigma_{\varphi z} \neq 0; \ \epsilon_z = -K(z)\, x_1; \ \epsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\, \Omega(z)\, r.$$

Остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Из условия несжимаемости получим $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$; $e_{33} = \epsilon_{33}$; $e_{11} = \epsilon_{11} = e_{22} = \epsilon_{22} = e_{33}/2 = -\epsilon_{33}/2$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \delta S_z &= \delta\epsilon_z - A\delta\Gamma^2 \epsilon_z ; \\ \delta S_{z\varphi} &= \delta\epsilon_{z\varphi} - A\delta\Gamma^2 \epsilon_{z\varphi}, \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

где $\Gamma^2 = 2e_{ij}e_{ij} = 3\epsilon_z^2 + 4\epsilon_{\varphi z}^2 = 3K^2 x_1^2 + \Omega^2 r^2$;

$$\delta\Gamma^2 = 3x_1^2\, \delta K^2 + r^2 \delta\Omega^2.$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} & M_2 = M_{23} = \iint_\Sigma \sigma_{33}\, x_1 ds; \quad M_3 = \iint_\Sigma \sigma_{z\varphi}\, r ds; \\ & a_1 = \frac{3}{2} \iint_\Sigma x_1^2\, ds; \quad a_2 = \frac{9}{2} A \iint_A x_1^4\, ds; \quad a_3 = \frac{3}{2} A \iint_\Sigma x_1^2 r^2 ds; \\ & a_4 = \frac{1}{2} \iint_\Sigma r^2 ds; \quad a_5 = \frac{A}{2} \iint_\Sigma r^4 ds. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Умножая члены уравнений (32) на x_1, r соответственно и интегрируя их по области поперечного сечения с учетом (33), получим для неизвестных функций $K(z)$, $\Omega(z)$ уравнения

$$\begin{cases} \delta M_2 = (a_2 K\delta K^2 + a_3 K\delta\Omega^2) - a_1\delta K; \\ \delta M_3 = a_4\delta\Omega - (a_3\Omega\delta K^2 + a_5\Omega\delta\Omega^2), \end{cases} \tag{34}$$

Добавим к (34) уравнения равновесия стержня

$$\frac{dM_2}{dz} + Q(z) = 0; \quad \frac{dQ}{dz} + q(z) = 0, \tag{35}$$

где $Q(z)$ — перерезывающая сила; $q(z)$ — распределенная поперечная нагрузка.

После интегрирования уравнений (35) получим полную систему уравнений для данной упругопластической задачи относительно $K(z, \lambda)$, $\Omega(z, \lambda)$. Из (34), разлагая $K(z, \lambda)$, $\Omega(z, \lambda)$ в ряды по параметру нагружения и выполняя необходимые преобразования, имеем

$$\begin{cases} M_k^{(2)} = (a_2 + a_3) K_k + (a_2 R_k^{(1)} + a_3 P_k^{(1)}); \\ -M_k^{(3)} = (a_3 + a_5)\Omega_k + (a_3 R_k^{(2)} + a_5 P_k^{(2)}), \end{cases} \tag{36}$$

Как видно, уравнения (36) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (19), поэтому доказательство сходимости проводится так же, как и в задаче 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. О некоторых методах решения упругопластических задач для упрочняющих тел // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1986. — Вып. 13. — С. 3—7. 2. Ибрагимов В.А., Нифагин В.А. Аналитическое решение задачи о двухосном растяжении плоскости с круговым отверстием при определяющих соотношениях теории пластичности с упрочнением // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1987. — Вып. 14. — С. 29—32. 3. Клюшников В.Д. Математическая теория пластичности. — М., 1979. — 297 с. 4. Уиттекер Э., Ватсон Дж. Курс современного анализа. — М., 1968. — Ч. 1. — 516 с.