Если при применении МЭМ в качестве ведущего звена используется промежуточный эксцентрик *3*, а в качестве обобщенной координаты – угол $\varphi_{34}$ поворота его относительно толкателя, то функции положения $\varphi_5 = \varphi_5(\varphi_{34})$ и $l_4 = l_4(\varphi_{34})$ могут быть найдены из уравнений (5) и (6), скоростные параметры – по формулам $\omega_5 = \omega_{34} i_{5(34)}$ и $v_4 = \omega_{34} b_{4(34)}$, а ускорения – по формулам $\epsilon_5 = \epsilon_{34} i_{5(34)} + \omega_{34}^2 i'_{5(34)}$ и $a_4 = \epsilon_{34} b_{4(34)} + \omega_{34}^2 b'_{4(34)}$. При этом неизвестные передаточные функции $i_{5(34)}$ и $b_{4(34)}$ и их производные $i'_{5(34)}$ и $b'_{4(34)}$ определяют соответственно из соотношений (5), (6) и (16), (17) путем подстановки вместо индекса 3 индекса новой обобщенной координаты 34 и вместо углового параметра $\varphi_3$ равного ему значения $\varphi_{34} + \pi/2$. Очевидно, что $\omega_{34} = \omega_3$. При задании $\omega_{34} = \mathrm{const}$ получаем $\epsilon_{34} = 0$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молочко В.И. Новые конструкции эксцентриковых приводов для устройств вибрационного точения // Весці АН БССР. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 1985. – № 3. – С. 61–64.

*УДК 533.6*

**В.В. БЕЛОВ**

# СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ

Трудности описания равновесных систем заряженных частиц связаны в первую очередь с дальнодействующим характером межчастичного взаимодействия. В случае разреженных сред расходимости, обусловленные кулоновским потенциалом, удается устранить либо с помощью разложения, например по плазменному параметру [1], либо суммированием специального класса диаграмм [2].

В работе [3] расходимости устраняются с помощью условий общей и локальной нейтральности. Определенное продвижение в сторону бóльших плотностей позволяет осуществить метод коллективных переменных [4], который приводит к своеобразным групповым разложениям.

Получим уравнения для кулоновских систем без предположения о наличии малого параметра. Рассмотрим простейший вариант однокомпонентной плазмы на однородном компенсирующем фоне, что обеспечивает электронейтральность этой системы. Пусть совокупность из $N$ тождественных частиц занимает объем $V$. Ее потенциальную энергию будем считать парной аддитивной функцией.

$$U_N = \sum_{j=2}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \overline{\Phi}(i,j) \ ,$$

где $\Phi$ – кулоновский потенциал.

Функции распределения (ФР) групп из $s$, $s = 1, 2, \ldots$ частиц определяются интегрированием конфигурационной части гиббсовского распределения $\exp(-\beta U_N)$ по координатам остальных $N-s$ частиц [1]:

$$f_s(1, \ldots, s) = \int_V d(s+1) \ldots \int_V dN \exp(-\beta U_N) \ . \tag{1}$$

Отсюда следует, что функции соседних порядков связаны между собой интегральным соотношением

$$f_s(1, \ldots, s) = \int_V d(s+1) f_{s+1}(1, \ldots, s, s+1) \ , \tag{2}$$

а конфигурационный интеграл имеет вид

$$Q_N = \int_V d1 \ldots \int_V dN \exp(-\beta U_N) = \int_V d1 f_1(1) .$$

Если ввести теперь функцию $\varphi_s$ $(1, \ldots, s)$ с помощью соотношения из [5]

$$\exp[-\beta\varphi_s(1, \ldots, s)] = Q^{-(N-s)} \int_V d(s+1) \ldots \int_V dN \exp[-\beta \sum_{j=s+1}^{N} \sum_{i=1}^{j-1} \Phi(i,j)],$$

то ФР (1) можно представить в виде

$$f_s(1, \ldots, s) = Q^{N-s} \exp\left\{-\beta[U_s + \varphi_s(1, \ldots, s)]\right\} . \tag{3}$$

Здесь $Q$ – нормировочный множитель, определяемый соотношением

$$Q = \int_V d1 \exp[-\beta\varphi_1(1)] \ , \tag{4}$$

следовательно,

$$Q_N = Q^N . \tag{5}$$

Подстановка (3) в (2) связывает введенные функции $\varphi$ соседних порядков:

$$\exp[-\beta\varphi_s(1, \ldots, s)] = Q^{-1} \int_V d(s+1) \exp\left\{-\beta[\sum_{i=1}^{s} \Phi(i, s+1) + \right.$$

$$\left. + \varphi_{s+1}(1, \ldots, s+1)]\right\} \ , \tag{6}$$

т. е. получается цепочка интегральных уравнений при $s = 1, 2, \ldots$ Ее замыкание можно осуществить на основе следующего представления для $\varphi$ [5]:

$$\varphi_s(1, \ldots, s) = \sum_{n=1}^{s} \frac{N-s}{N-n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant s} \omega_n(i_1, \ldots, i_n) \ , \ \omega_1 \equiv \varphi_1 \ .$$

В работе [3] использовалось похожее представление, отличающееся коэффициентами при $\omega_n$: там они равны единице. Введение новых функций $\omega$ позволяет реализовать своеобразную процедуру последовательных приближений: первому приближению соответствует условие $\omega_s = 0$ для $s > 2$, второму – условие $\omega_s = 0$ для $s > 3$ и т. д.

В первом приближении система (6) сводится к системе двух уравнений:

$$\exp\left[-\frac{\beta\varphi_1(1)}{N-1}\right] = Q^{-1} \int_V d2\exp\left\{-\beta\left[\Phi(1,2) + \frac{N-2}{N-1}\varphi_1(2) + \omega_2(1,2)\right]\right\},$$

$$\exp\left\{-\beta\left[\frac{\varphi_1(1)+\varphi_1(2)}{N-1} + \frac{\omega_2(1,2)}{N-2}\right]\right\} = Q^{-1}\int_V d3\exp\left\{-\beta\left[\Phi(1,3) + \right.\right. \tag{7}$$

$$\left.\left. + \Phi(2,3) + \frac{N-3}{N-1}\varphi_1(3) + \frac{N-3}{N-2}(\omega_2(1,3)+\omega_2(2,3))\right]\right\}.$$

Перейдем к термодинамическому пределу. При этом $\varphi_1(1) \to \varphi_1 = \mathrm{const}$, поскольку одночастичная ФР должна перейти в равномерное распределение; $Q \to V\exp(-\beta\varphi_1)$. Подынтегральные выражения необходимо регуляризовать, вычтя из каждого единицу, и, кроме того, прибавив к обеим частям второго уравнения системы (7) одинаковые выражения. Затем, разложив экспоненты, содержащие показатели $O(N^{-1})$, в ряды и устремив $N \to \infty$ и $V \to \infty$, получим

$$2\beta\varphi_1 = -v^{-1}\int d2\left\{\exp[-\Omega(1,2)] - 1\right\}, \tag{8}$$

$$\Omega(1,2) + \beta v^{-1}\int d3\,\Phi(1,3)\,\Omega(2,3) = \beta\Phi(1,2) -$$

$$- v^{-1}\int d3\left\{\exp[-\Omega(1,3)] - 1\right\}\left\{\exp[-\Omega(2,3)] - 1\right\}, \tag{9}$$

где $\Omega = \beta(\Phi + \omega_2)$; $v$ – удельный объем.

Уравнение (9) определяет функцию $\Omega$, через которую выражается не только радиальная ФР, но и свободная энергия $\beta F = -\ln Q_N$ (с помощью соотношений (8), (4) и (5)).

Прежде чем приступать к решению такого сложного нелинейного интегрального уравнения, как (9), следует выяснить, в каком отношении находится оно с уравнениями, полученными ранее. Непосредственное сопоставление возможно лишь в некоторых предельных случаях, например при наличии малого параметра, каковым для кулоновских систем в определенных условиях является плазменный параметр $\epsilon = v/R_D^3$, где $R_D = (v/(4\pi\beta e^2))^{1/2}$ – дебаевский радиус; $e$ – заряд частицы.

Для определения относительной величины членов уравнения (9) запишем его в безразмерном виде, выбрав в качестве единицы длины дебаевский радиус:

$$\Omega(r) + (4\pi)^{-1}\int d^3s\,\varphi(s)\,\Omega(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|) =$$

$$= \epsilon\varphi(r)/(4\pi) - \epsilon^{-1}\int d^3s\left\{\exp[-\Omega(s)]-1\right\}\left\{\exp[-\Omega(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|)] - 1\right\}. \tag{10}$$

Здесь учтено, что $\beta\Phi(q) = \beta e^2/q = \epsilon\varphi(r)/(4\pi)$, $r = q/R_D$, $\varphi(r) = 1/r$. Решение уравнения (10) будем искать с помощью разложения по степеням $\epsilon$: $\Omega = \Omega^{(0)} + \epsilon\Omega^{(1)} + \ldots$ Подставляя это разложение в уравнение (10) и приравнивая члены при одинаковых степенях $\epsilon$, получаем, что $\Omega^{(0)} \equiv 0$, а уравнение для $\Omega^{(1)}$ имеет вид

$$\Omega^{(1)}(r) + (4\pi)^{-1}\int d^3s\,\varphi(s)\,\Omega^{(1)}(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|) =$$

$$= \varphi(r)/(4\pi) - \int d^3s\,\Omega^{(1)}s\,\Omega^{(1)}(|\mathbf{r}-\mathbf{s}|)\,. \qquad (11)$$

Для отыскания решения последнего уравнения воспользуемся преобразованием Фурье, определяемым соотношением

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-3}\int d^3r f(\mathbf{r})\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\,. \qquad (12)$$

Поскольку интегралы в уравнении (11) являются свертками двух функций, то, применив к обеим частям этого уравнения преобразование (12), получим:

$$\tilde{\Omega}(k) + 2\pi^2\tilde{\varphi}(k)\,\tilde{\Omega}(k) = \tilde{\varphi}/(4\pi) - (2\pi)^3\tilde{\Omega}^2(k)\,.$$

Решение этого квадратного уравнения не представляет труда:

$$\tilde{\Omega}(k) = -\Big\{1 + 2\pi^2\tilde{\varphi}(k) \mp [(1 + 2\pi^2\tilde{\varphi}(k))^2 +$$

$$+ 8\pi^2\tilde{\varphi}(k)]^{1/2}\Big\}/(2(2\pi)^3)\,. \qquad (13)$$

Если теперь учесть явный вид фурье-образа кулоновского потенциала $\tilde{\varphi}(k) = 1/(2\pi^2k^2)$, то станет очевидным, что нужно выбрать верхний знак перед радикалом, ибо только такой выбор обеспечивает убывание $\tilde{\Omega}(k)$ при $k \to \infty$. С учетом этого соображения равенство (13) можно представить в виде

$$\tilde{\Omega}(k) = 2(2\pi)^{-3}[k^2 + 1 + (k^4 + 6k^2 + 1)^{1/2}]^{-1}\,,$$

и, следовательно, в силу четности $\tilde{\Omega}(k)$

$$\Omega^{(1)}(r) = \int d^3k\,\tilde{\Omega}(k)\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) =$$

$$= 2\pi i r^{-1}\int_0^\infty dk\,k\,\tilde{\Omega}(k)[\exp(-ikr) - \exp(ikr)] =$$

$$= -2\pi i r^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,k\,\tilde{\Omega}(k)\exp(ikr) = \frac{1}{2\pi^2 ir}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k\exp(ikr)dk}{k^2+1+(k^4+6k^2+1)^{1/2}}\,. \qquad (14)$$

Для дальнейших преобразований продолжим подынтегральную функцию в комплексную плоскость и рассмотрим интеграл по замкнутому контуру

$$\oint\limits_{(C)} f(z)\exp(irz)dz = \oint\limits_{(C)} \frac{z\exp(irz)dz}{z^2+1+(z^4+6z^2+1)^{1/2}}, \quad k = \mathrm{Re}\, z\,. \tag{15}$$

Функция $f(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$ и имеет особые точки (точки ветвления), определяемые уравнением $z^4 + 6z^2 + 1 = 0$. Корни этого уравнения:

$$z_1 = i\sqrt{3-\sqrt{8}},\; z_2 = -i\sqrt{3-\sqrt{8}},\; z_3 = i\sqrt{3+\sqrt{8}},$$
$$z_4 = -i\sqrt{3+\sqrt{8}}. \tag{16}$$

Поскольку параметр $r$, стоящий в показателе экспоненты в (15), положителен, контур $C$ нужно замкнуть в верхней полуплоскости комплексной переменной $z$, в которой находятся две точки ветвления $z_1$ и $z_3$. Для того чтобы функция $f(z)$ стала однозначной, проведем разрез, соединяющий эти точки. Тогда контур $C$ будет выглядеть так, как представлено на рис. 1. Он состоит из отрезка действительной оси $[-R, R]$, двух четвертей $C_1$ и $C_5$ окружности радиусом $R$, двух полуокружностей $C_2$ и $C_4$ радиусом $\rho_2$, охватывающих точку $z_3$, окружности $C_3$ радиусом $\rho_1$, по которой обходится точка $z_1$, и двух отрезков мнимой оси.

Таким образом, внутри замкнутого контура $C$ нет особых точек функции $f(z)$ и по теореме Коши [6] интеграл (15) равен нулю:

$$0 = \oint\limits_{(C)} f(z)\exp(irz)dz =$$
$$= \int\limits_{-R}^{R} + \int\limits_{(C_1)} + \int\limits_{R}^{b+\rho_2} + \int\limits_{(C_2)} + \int\limits_{b-\rho_2}^{a+\rho_1} + \int\limits_{(C_3)} + \int\limits_{a+\rho_1}^{b-\rho_2} + \int\limits_{(C_4)} + \int\limits_{b+\rho_2}^{R} + \int\limits_{(C_5)}, \tag{17}$$

где $a = |z_1|$; $b = |z_3|$.

Поскольку значение интеграла не изменяется при любой деформации контура, перейдем к пределу $R \to \infty$, $\rho_1 \to 0$, $\rho_2 \to 0$. При этом отличными от нуля оказываются лишь первый, пятый и седьмой интегралы. На правом берегу разреза $z = iy$, $a < y < b$, поэтому $(z^4 + 6z^2 + 1)^{1/2} = i[(y^2 - a^2)(b^2 - y^2)]^{1/2}$; при переходе на левый берег разреза знак правой части последнего выражения меняется на противоположный.

С учетом сказанного выше получим из (17)

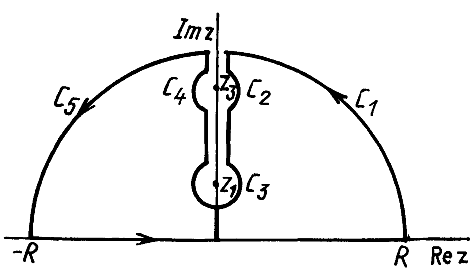


Рис. 1. Контур интегрирования

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\exp(irk)dk}{1+k^2+(k^4+6k^2+1)^{1/2}} = 2i \int_a^b \frac{y[(y^2-a^2)(b^2-y^2)]^{1/2}\exp(-ry)}{(1-y^2)^2+(y^2-a^2)(b^2-y^2)} dy ,$$

или, имея в виду значения корней (16),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\exp(irk)dk}{1+k^2+(k^4+6k^2+1)^{1/2}} = \frac{i}{2} \int_a^b y^{-1}[(y^2-a^2)(b^2-y^2)]^{1/2}\exp(-ry)dy =$$

$$= \frac{i}{2} \exp(-ar) \int_0^{b-a} (y+a)^{-1}\left\{ y(y+2a)\,[\,b^2-(y+a)^2\,]\right\}^{1/2}\exp(-ry)dy .$$

Подставив последнее соотношение в (14), получим решение уравнения (11):

$$\Omega^{(1)}(r) = \frac{\exp(-ar)}{4\pi^2 r} \int_0^{b-a} (y+a)^{-1}\left\{y(y+2a)[\,b^2-(y+a)^2\,]\right\}^{1/2}\exp(-ry)dy. \tag{18}$$

Полученное выражение отличается от дебаевского потенциала $e^{-r}/r$, к которому приходят в работах [1, 2], и в этом нет ничего удивительного. В работе [1] решается интегродифференциальное уравнение, и в нем одна из частиц (та, по координатам которой осуществляется дифференцирование) играет выделенную роль, в используемом же здесь интегральном уравнении (9) все частицы равноправны. В работе [2] дебаевский потенциал получается в результате суммирования кольцевых диаграмм. Впрочем, как отмечается в той же работе, расчет термодинамических величин с помощью дебаевского потенциала приводит к заметным отклонениям от экспериментальных данных даже при очень низких концентрациях.

В заключение отметим, что формула (18) обеспечивает нейтральность системы из некоторой частицы и окружающего ее облака.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. Избранные труды. – Киев, 1970. – Т. 2. – 520 с. 2. Майер Дж., Гепперт-Майер М. Статистическая механика. – М., 1980. – 544 с. 3. Мартынов Г.А. // Теорет. и мат. физика. – 1975. – Т. 22, № 2. – С. 260–268. 4. Юхновский И.Р., Головко М.Ф. Статистическая теория классических равновесных систем. Киев, 1980. – 372 с. 5. Белов В.В. Новые интегральные уравнения для простых жидкостей // Докл. АН БССР. – 1988. – Т. 32, № 2. – С. 116–119. 6. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М., 1982. – 488 с.