сительно вышеназванных переменных, истинное поле напряжений определяют по формулам (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Филоненко-Бородич М.М. Об одной системе функций и ее приложениях в теории упругости // ПММ. – 1946. – Т. X, вып. 1. – С. 33–50. 2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев, 1982. – 551 с. 3. Мартыненко М.Д., Журавков М.А. Решение первой основной задачи пространственной теории упругости // Теорет. и прикл. механика. – Киев; Донецк, 1986. – Вып. 17. – С. 19–21.

УДК 539.3

Е.П. ЖУРАВКОВА

МЕТОД КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть область D ограничена поверхностью вращения $S = S_1 \cup S_2$. Рассмотрим задачу определения в области D функции v, удовлетворяющей уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 v(r,z)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v(r,z)}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v(r,z)}{\partial r} = f(r,z), \tag{1}$$

при выполнении следующих граничных условий:

$$v|_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial n} + hv|_{S_2} = 0. \tag{2}$$

Отметим, что любая задача с ненулевыми граничными условиями может быть приведена к виду (1)–(2) с помощью метода продолжения граничных значений функций внутрь области, основанного на теории R-функций [1].

Фундаментальное решение $K(r, z, \rho, \eta)$ оператора Лапласа для осесимметричного случая можно представить в виде [2].

$$K(r,z,\rho,\eta) = 4K(m)/[(r+\rho)^2 + (z-\eta)^2]^{1/2},$$

где $K(m)$ – полный эллиптический интеграл первого рода; $m = 4r\rho/[(r+\rho)^2 + (z-\eta)^2]^{1/2}$ [3]. Нетрудно показать, что $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Применив к задаче (1)–(2) процедуру получения разрешающих интегральных уравнений метода квазифункций Грина, аналогичную описанной в работе [1], получим

$$v(r,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_D f(\rho,\eta)F(r,z,\rho,\eta)\,d_\eta D - \frac{1}{4\pi}\int_D v(\rho,\eta)\Big[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}]\, q(r, z, \rho, \eta)\, d_{\eta} D, \qquad (3)$$

где $F(r, z, \rho, \eta)$ – квазифункция Грина:

$$F(r, z, \rho, \eta) = K(r, z, \rho, \eta) - q(r, z, \rho, \eta). \qquad (4)$$

Функцию $q(r, z, \rho, \eta)$ строим таким образом, чтобы квазифункция Грина (4) удовлетворяла соответствующим однородным граничным условиям, а сама функция $q(r, z, \rho, \eta)$ в особых точках функции Грина была бы гладкой и обеспечивала непрерывность ядер подынтегральных выражений. В результате проведенных исследований получаем, что в случае $S = S_1$, $S_2 = \emptyset$ функция $q\ (r, z, \rho, \eta)$ имеет следующий вид:

$$q(r, z, \rho, \eta) = 4K(\overline{m})/(a + b + \widetilde{b})^{1/2}, \qquad (5)$$

где $\overline{m} = (2b + \widetilde{b})/(a + b + \widetilde{b})$; $b = 2r\rho$; $a = r^2 + \rho^2 + (z - \eta)^2$; $\widetilde{b} = -8/3\omega(r,z) \times \omega(\rho, \eta)$; $\omega(r, z)$ – нормализованное до первого порядка элементарное уравнение области интегрирования [1], причем $\omega(r, z) > 0$, $(r, z) \in D \setminus S$. В случае, когда $S_2 \neq \emptyset$, функция $q(r, z, \rho, \eta)$ имеет более сложную структуру.

Если граничные условия на поверхности вращения зависят от угловой координаты φ, можно воспользоваться разложением функций в ряды Фурье по переменной φ. В результате этого исходная осесимметричная задача с произвольными граничными условиями будет сведена к последовательности несвязанных и независящих от угловой переменной двухмерных задач [2]. Процедура построения интегральных представлений для коэффициентов ряда Фурье в данном случае аналогична приведенной выше (см. (3)).

Рассмотренная выше осесимметричная квазифункция Грина (4) для уравнения Лапласа непосредственно может быть использована при решении граничных задач теории упругости в перемещениях. Для этого необходимо записать уравнения равновесия Ламе в цилиндрической системе координат и затем, воспользовавшись схемой, предложенной, например, в работе [4], построить для компонент вектора перемещения и объемного расширения интегральные представления, ядра которых выражаются через выведенную выше осесимметричную квазифункцию Грина вида (4) с функцией $q(r, z, \rho, \eta)$ вида (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев, 1982. 551 с. 2. Б р е б б и я К., Т е л л е с Ж., В р о у б е л Л. Методы граничных элементов. М., 1987. – 524 с. 3. Справочник по специальным функциям / Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. – М., 1979. – 830 с. 4. М а р т ы н е н к о М.Д., Ж у р а в к о в М.А. Решение смешанной задачи теории упругости методом В.Л. Рвачева квазифункций Грина // Мат. методы анализа динамических систем. – Харьков, 1985. – С. 137–141.