

$$S_2 = a_{23} + d_2 + d_2', \quad (7)$$

$$S_3 = a_{45} + d_3. \quad (8)$$

Приравняв попарно выражения (3)–(5) и (6)–(8), получим три нелинейных уравнения с тремя неизвестными обобщенными координатами φ_{12} , φ_{34} , φ_{56} . Решение этой системы осуществлялось на ЭВМ ЕС 1022 по разработанной авторами программе, основанной на демпфированном методе наименьших квадратов [5]. Остальные обобщенные координаты манипулятора φ_{01} , φ_{23} , φ_{45} определяются в явном виде.

Результаты решения обратной задачи на ЭВМ по описанному алгоритму показывают, что, как правило, существует конечное число вариантов решения. Для манипулятора, изображенного на рис. 1, их не более 32. В некоторых случаях решение отсутствует либо возникает бесконечное множество решений. Все эти ситуации определяются геометрией кинематической цепи манипулятора и геометрической характеристикой рабочей операции, выполняемой захватом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карпович С.Е. Формализованное описание и исследование на ЭВМ исполнительных манипуляторов робототехнических систем // Приборостроение. – Мн., 1985. – Вып. 7. – С. 7–12.
2. Карпович С.Е., Литвин Ф.Л. Условия существования одного и двух кривошипов в механизме ВЦЦ // Изв. вузов. Сер. Машиностроение. – 1976. – № 8. – С. 52–56.
3. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные работы: Динамика и алгоритмы. – М., 1978. – 398 с.
4. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. – М., 1982. – 335 с.
5. Химмельблау Д. Прикладное нелинейно программирование. – М., 1975. – 534 с.

УДК 531.01

М.А. МАЦУР

МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОНОМНЫХ И НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ ОБЩЕГО ВИДА

Изложение вопросов механики неголономных систем дано в книгах [1–3]. Известные методы составления уравнений движения неголономных систем предназначены, как правило, для систем с линейными связями первого порядка и имеют сложную структуру.

В настоящей работе излагается метод составления уравнений движения голономных и неголономных систем со связями произвольных порядков общего вида. Учет связей, налагаемых на систему, осуществляется с помощью коэффициентов влияния связей.

Рассмотрим систему, состоящую из N материальных точек A_j , $j = 1, \dots, N$, массы которых m_j . На эту систему действуют заданные силы F_j и реакции

связей R_j . Положение каждой точки определяется вектором r_j в некоторой инерциальной системе отсчета.

Допустим вначале, что на систему наложены только голономные связи, записанные в декартовых координатах, которые позволяют выразить все $3N$ таких координат через k независимых обобщенных координат q_i , $i = 1, \dots, k$. В этом случае выполняются соотношения [3]:

$$r_j = r_j(q_i, t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (1)$$

$$\frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{\partial r_j^{(n)}}{\partial q_i^{(n)}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial r_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{r}_j}{\partial q_i}, \quad (2)$$

$$\delta r_j^{(n)} = \sum_{i=1}^k \frac{\partial r_j}{\partial q_i} \delta q_i^{(n)}. \quad (3)$$

Запишем уравнения движения системы:

$$m_j \ddot{r}_j = F_j + R_j \quad (4)$$

и условие идеальности связей:

$$\sum_{j=1}^N R_j \cdot \delta r_j^{(n)} = 0. \quad (5)$$

Перепишем уравнение (5), используя соотношение (4). В результате получим принцип Манжера:

$$\sum_{j=1}^N (F_j - m_j \ddot{r}_j) \cdot \delta r_j^{(n)} = 0. \quad (6)$$

Введем обозначения обобщенных сил, обусловленных действием заданных сил и сил инерции:

$$Q_i = \sum_{j=1}^N F_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i}, \quad I_i = -\sum_{j=1}^N m_j \ddot{r}_j \cdot \frac{\partial r_j}{\partial q_i}. \quad (7)$$

При выполнении соотношений (1) и (2) справедлива формула Лагранжа

$$-I_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}, \quad (8)$$

где T – кинетическая энергия механической системы. Подставим выражение (3) в (6), тогда с учетом равенств (7) получим

$$\sum_{i=1}^k (Q_i + I_i) \delta q_i^{(n)} = 0. \quad (9)$$

Пусть на механическую систему дополнительно наложены голономные связи, которые не учитывались при выборе обобщенных координат, и неголо-

номные связи с уравнениями произвольных порядков. Все уравнения таких связей путем дифференцирования по времени приводим к уравнениям n -го порядка. Теперь предположим, что на систему наложены связи n -го порядка, выражающиеся дифференциальными уравнениями вида

$$f_s(q_i, \dot{q}_i, \dots, \overset{(n)}{q}_i, t) = 0, \quad s = 1, \dots, d. \quad (10)$$

Продифференцируем уравнение (10) по времени. Получим

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f_s}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial \overset{(n)}{q}_i} \overset{(n+1)}{q}_i \right) + \frac{\partial f_s}{\partial t} = 0, \quad s = 1, \dots, d. \quad (11)$$

Принимая $\delta q_i = 0$, $\delta \dot{q}_i = 0$, ..., $\delta \overset{(n-1)}{q}_i = 0$, на основании уравнения (11) имеем уравнения в вариациях

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f_s}{\partial \overset{(n)}{q}_i} \delta \overset{(n)}{q}_i = 0, \quad s = 1, \dots, d. \quad (12)$$

Так как $k > d$, то среди вариаций $\delta \overset{(n)}{q}_i$ имеются независимые. Введем независимые переменные π_p , $p = 1, \dots, h$. В качестве таких переменных можно принять, например, независимые $\overset{(n)}{q}_p$. Используя (12), выразим все вариации $\delta \overset{(n)}{q}_i$ через независимые вариации $\delta \pi_p$:

$$\delta \overset{(n)}{q}_i = \sum_{p=1}^h b_{ip} \delta \pi_p, \quad i = 1, \dots, k, \quad (13)$$

где b_{ip} — коэффициенты влияния связей, представляющие известные функции $b_{ip} = b_{ip}(q_i, \dot{q}_i, \dots, \overset{(n)}{q}_i, t)$.

Подставив выражения (13) в уравнение (9), получим

$$\sum_{p=1}^h \left[\sum_{i=1}^k (Q_i + I_i) b_{ip} \right] \delta \pi_p = 0. \quad (14)$$

Так как все величины $\delta \pi_p$ независимы, то уравнение (14) эквивалентно системе уравнений

$$\sum_{i=1}^k \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i \right) b_{ip} = 0, \quad p = 1, \dots, h. \quad (15)$$

Уравнения (15) записаны с учетом формулы (8). Кинетическая энергия T и обобщенные силы Q_i определяются без учета уравнений связей (10).

Уравнения (15) и (11) образуют замкнутую систему $h + d$ дифференци-

альных уравнений относительно неизвестных обобщенных координат q_i . Уравнения (15) выражают суть предлагаемого метода и предназначены для составления уравнений движения механических систем с произвольными связями. Уравнения Лагранжа второго рода и уравнения Маджи являются частными случаями уравнений (15).

Рассмотрим пример применения изложенного метода. Составим уравнения движения материальной точки массой m в поле силы ньютонова притяжения со стороны другого неподвижного тела массой M , если движение материальной точки по траектории осуществляется с постоянной по модулю скоростью. В этом случае

$$v^2 = \text{const}, \quad (16)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2, \quad (17)$$

$$T = \frac{1}{2} m v^2, \quad \Pi = -\gamma M m / r, \quad (18)$$

где r, φ, θ — сферические координаты с началом в притягивающем центре; γ — постоянная тяготения; Π — потенциальная энергия точки.

Продифференцируем по времени равенство (16); с учетом (17) получим уравнение связи

$$\begin{aligned} \ddot{r} = & -(\dot{\varphi} \dot{\varphi} \cos^2 \theta + \dot{\theta} \dot{\theta}) r^2 / \dot{r} - (\dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + \dot{\theta}^2) r + \\ & + \cos \theta \sin \theta \dot{\varphi}^2 \dot{\theta} r^2 / \dot{r}. \end{aligned} \quad (19)$$

Выберем обобщенные координаты $q_1 = \varphi, q_2 = \theta, q_3 = r$. За независимые переменные примем

$$\ddot{\pi}_1 = \ddot{\varphi}, \quad \ddot{\pi}_2 = \ddot{\theta}. \quad (20)$$

Уравнения (13) запишем в матричной форме:

$$(\delta \dot{\varphi} \quad \delta \dot{\theta} \quad \delta \dot{r})^T = B (\delta \dot{\pi}_1 \quad \delta \dot{\pi}_2)^T,$$

где B — матрица коэффициентов влияния связи, составленная с учетом зависимостей (19), (20):

$$\begin{aligned} b_{11} = b_{22} = 1, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \\ b_{31} = -r^2 \dot{\varphi} \cos^2 \theta / \dot{r}, \quad b_{32} = -r^2 \dot{\theta} / \dot{r}. \end{aligned}$$

Используя выражения (18) и (8), определяем $I_1, I_2, I_3, Q_1 = 0, Q_2 = 0, Q_3 = -\gamma M m / r^2$. В результате получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + (I_3 + Q_3) b_{31} &= 0, \\ I_2 + (I_3 + Q_3) b_{32} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Уравнения (21) и (19) образуют замкнутую систему трех дифференциальных уравнений относительно трех сферических координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А.И. Аналитическая механика. — М., 1961. — 824 с. 2. Неймарк Ю.И., Ф у ф а е в Н.А. Динамика неголономных систем. — М., 1967. — 519 с. 3. Д о б р о н р а в о в В.В. Основы механики неголономных систем. — М., 1970. — 270 с.

УДК 621.941-229(088.8)

В.И. МОЛОЧКО

КИНЕМАТИКА МОДИФИЦИРОВАННОГО ЭКСЦЕНТРИКОВОГО МЕХАНИЗМА С ПОСТУПАТЕЛЬНО ПЕРЕМЕЩАЮЩИМСЯ РОЛИКОВЫМ ТОЛКАТЕЛЕМ

Модифицированные эксцентрикые механизмы (МЭМ) нашли практическое применение в станочных устройствах для вибрационного точения [1]. В настоящей статье рассматривается кинематика нецентрального МЭМ с поступательно перемещающимся роликовым толкателем 4 (рис. 1). Кинематическое исследование такого МЭМ следует проводить на основе усложненного структурного эквивалента (рис. 2, а), отличающегося от исходного механизма (см. рис. 1) наличием дополнительного звена-водила 5, шарнирно соединяющего центры контактирующих дисков 2 и 3. Переход к усложненному структурному эквиваленту позволяет исследуемый МЭМ рассматривать как фрикционно-рычажный дифференциальный механизм 1-2-3-4-5, дополнительная (замыкающая) кинематическая цепь которого выполнена в виде коромысло-ползунного механизма 1-3-4-5 с полнооборотным шатуном 3.

При определении функций положения ведомых звеньев такого МЭМ воспользуемся формулой Виллиса для дифференциальных фрикционных (зубчатых) механизмов:

При определении функций положения ведомых звеньев такого МЭМ воспользуемся формулой Виллиса для дифференциальных фрикционных (зубчатых) механизмов:

$$\frac{\omega_2 - \omega_5}{\omega_3 - \omega_5} = i_{23}^{(5)}, \quad (1)$$

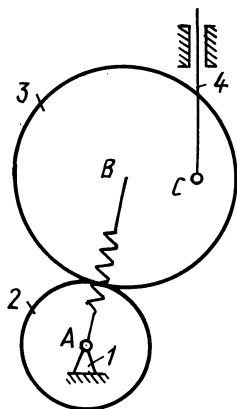


Рис. 1. Модифицированный эксцентрикый механизм с поступательно перемещающимся роликовым толкателем:

1 — неподвижная стойка;
2 — цилиндрический ведущий ролик (вал); 3 — эксцентрик; 4 — толкатель

математически связывающей угловые скорости ω_2 ведущего ролика 2, ω_3 промежуточного эксцентрика 3 и ω_5 дополнительно введенного звена-водила 5 с диаметрными размерами ролика d_2 и эксцентрика d_3 (здесь $i_{23}^{(5)} = \pm d_3/d_2$, причем знак "+" соответствует внутреннему, а знак "-" — внешнему контакту соприкасающихся катков).