

336 с. 3. Т р а п е з о н Л.Г. Расчет упругих элементов при резонансных усталостных испытаниях. — Киев, 1983. — 95 с. 4. Б а б а к о в И.М. Теория колебаний. — М., 1965. — 560 с. 5. Т и м о ш е н к о С.П. Колебания в инженерном деле. — М., 1967. — 32 с. 6. Б и р г е р И.А. Расчеты на прочность деталей машин: Справочник. — М., 1979. — 705 с.

УДК 539.319

Г.С. КРЫЛОВ, В.М. КОХАНОВСКАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ТОЛСТОСТЕННОГО БРУСА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОСЯХ

Для определения нормальных напряжений в произвольном сечении бруса по существующим формулам необходимо установить вид сопротивления, а также найти положение главных центральных осей сечения и вычислить геометрические характеристики относительно этих осей, что создает определенные неудобства, особенно для стержней со сложными составными сечениями.

Предлагаемая в данной статье формула для определения нормальных напряжений универсальна и позволяет получить решение в произвольной системе координат одновременно для всех видов сопротивления. Ее вывод основан на гипотезе плоских сечений и отсутствии бокового давления между волокнами бруса.

1. Рассмотрим прямой брус под действием произвольных нагрузок. Уравнения, определяющие внутренние силовые факторы через нормальные напряжения, имеют вид:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_x = \int_A \sigma y dA, \quad M_y = \int_A \sigma x dA. \quad (1)$$

Согласно гипотезе плоских сечений, плоское поперечное сечение до деформации ($\Delta dz = 0$) остается плоским и после деформации ($\Delta dz = ax + by + c$). Параметры деформации a , b , c не могут быть одновременно равны нулю, если существует деформация.

Относительная деформация в окрестности рассматриваемого сечения

$$\epsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{ax + by + c}{dz}.$$

На основании закона Гука и при отсутствии давления между волокнами бруса

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma = \epsilon E = \frac{ax + by + c}{dz} E. \quad (2)$$

Так как отношение $\frac{\sigma}{ax + by + c} = \frac{E}{dz}$ не зависит от координат точек в сечении, то уравнения (1) с учетом (2) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{\sigma}{ax + by + c} \int_A (ax + by + c) dA, \\ M_x &= \frac{\sigma}{ax + by + c} \int_A y(ax + by + c) dA, \\ M_y &= \frac{\sigma}{ax + by + c} \int_A x(ax + by + c) dA. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Введя геометрические характеристики сечения

$$\begin{aligned} S_x &= \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad J_x = \int_A y^2 dA, \\ J_y &= \int_A x^2 dA, \quad J_{xy} = \int_A xy dA, \end{aligned} \quad (4)$$

где S_x, S_y — статические моменты площади поперечного сечения относительно произвольных осей Ox, Oy , J_x, J_y, J_{xy} — моменты инерции поперечного сечения относительно тех же осей, выражения (3) можно записать так:

$$\begin{aligned} N &= \frac{\sigma}{ax + by + c} (aS_y + bS_x + cA), \\ M_x &= \frac{\sigma}{ax + by + c} (aJ_{xy} + bJ_x + cS_x), \\ M_y &= \frac{\sigma}{ax + by + c} (aJ_y + bJ_{xy} + cS_y). \end{aligned}$$

Сгруппировав члены, составим систему относительно параметров a, b, c :

$$\left. \begin{aligned} a(Nx - \sigma S_y) + b(Ny - \sigma S_x) + c(N - \sigma A) &= 0, \\ a(M_x x - \sigma J_{xy}) + b(M_x y - \sigma J_x) + c(M_x - \sigma S_x) &= 0, \\ a(M_y x - \sigma J_y) + b(M_y y - \sigma J_{xy}) + c(M_y - \sigma S_y) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для того чтобы параметры a, b и c не обращались в нуль одновременно, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при этих параметрах, был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} N - \sigma A & Ny - \sigma S_x & Nx - \sigma S_y \\ M_x - \sigma S_x & M_x y - \sigma J_x & M_x x - \sigma J_{xy} \\ M_y - \sigma S_y & M_y y - \sigma J_{xy} & M_y x - \sigma J_y \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Представим условие (5) как определитель разности двух матриц

$$|PX - \sigma F| = 0,$$

где P – матрица-столбец внутренних силовых факторов N, M_x, M_y ; X – матрица-строка координат исследуемой точки: $X = [1 \ y \ x]$; F – симметричная матрица геометрических характеристик сечения с определителем, отличным от нуля:

$$F = \begin{bmatrix} A & S_x & S_y \\ S_x & J_x & J_{xy} \\ S_y & J_{xy} & J_y \end{bmatrix}.$$

С учетом того, что определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц, имеем

$$|PXF^{-1} - \sigma \tilde{E}| = 0,$$

где \tilde{E} – единичная матрица третьего порядка. Это означает, что σ является собственным значением матрицы PXF^{-1} . Поскольку решение однозначно, то $\sigma = T_r(PXF^{-1})$, где T_r – след матрицы PXF^{-1} . Выражению для σ можно придать более удобный вид:

$$\sigma = XF^{-1}P. \quad (6)$$

Относительно главных центральных осей $S_x = S_y = J_{xy} = 0$ и матрица геометрических характеристик примет диагональный вид. В этой системе координат формула (6) для определения нормальных напряжений запишется так:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x.$$

Данная формула для сложного сопротивления прямого бруса имеется во всех учебниках по сопротивлению материалов и тем самым подтверждает правильность вывода матричной формулы.

2. Для кривого бруса под действием произвольных нагрузок получаем несколько иной результат. Уравнения равновесия остаются прежними (см. уравнения (1)), гипотеза плоских сечений также справедлива. Однако длина волокна в кривом бруске является функцией расстояния до центра кривизны. Поэтому при выделении элемента двумя поперечными сечениями, пересекающимися в центре кривизны под углом $d\varphi$, длина волокна, удаленного от оси на расстоянии ρ , $dz = \rho d\varphi$.

Относительная деформация волокна

$$\epsilon = \frac{ax + by + c}{\rho d\varphi}.$$

Так как ρ зависит от координат x и y в сечении, то отношение

$$\frac{\sigma \rho}{ax + by + c} = \frac{E}{d\varphi} \quad (7)$$

будет инвариантным.

Вынося левую часть уравнения (7) из-под знака интеграла в уравнениях равновесия (1), получим:

$$N = \frac{\sigma \rho}{ax + by + c} \int_A \frac{1}{\rho} (ax + by + c) dA,$$

$$M_x = \frac{\sigma \rho}{ax + by + c} \int_A \frac{y}{\rho} (ax + by + c) dA,$$

$$M_y = \frac{\sigma \rho}{ax + by + c} \int_A \frac{x}{\rho} (ax + by + c) dA.$$

Введем обозначения интегралов по аналогии с выражением (4):

$$A^* = \int_A \frac{dA}{\rho}, \quad S_x^* = \int_A y \frac{dA}{\rho}, \quad S_y^* = \int_A x \frac{dA}{\rho},$$

$$J_x^* = \int_A y^2 \frac{dA}{\rho}, \quad J_y^* = \int_A x^2 \frac{dA}{\rho}, \quad J_{xy}^* = \int_A xy \frac{dA}{\rho}.$$

Геометрическая характеристика сечения, отмеченная символом *, имеет размерность на единицу ниже, чем соответствующая геометрическая характеристика сечения для прямого бруса. Подставляя введенные обозначения в выражения внутренних силовых факторов и группируя члены, составляем систему относительно параметров a, b, c :

$$\left. \begin{aligned} a(Nx - \sigma \rho S_y^*) + b(Ny - \sigma \rho S_x^*) + c(N - \sigma \rho A^*) &= 0, \\ a(M_x x - \sigma \rho J_{xy}^*) + b(M_x y - \sigma \rho J_x^*) + c(M_x - \sigma \rho S_x^*) &= 0, \\ a(M_y x - \sigma \rho J_y^*) + b(M_y y - \sigma \rho J_{xy}^*) + c(M_y - \sigma \rho S_y^*) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

С учетом свойств определителей и того, что определитель матрицы геометрических характеристик, отмеченных символом *, не может быть нулевым, находим напряжения по аналогии с выражением (6).

В силу единственности решения можно записать:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} (XFA^*{}^{-1}P).$$

Матрица внутренних усилий в кривом бруссе остается такой же, как и в случае прямого бруса, а матрица геометрических характеристик составлена из величин, отмеченных звездочкой.

Если ввести среднее значение радиуса кривизны R_0 , то $A^* \approx A/R_0$, $S_x^* \approx S_x/R_0$, $S_y^* \approx S_y/R_0$, $J_x^* \approx J_x/R_0$, $J_y^* \approx J_y/R_0$, $J_{xy}^* \approx J_{xy}/R_0$ и

$$\sigma = \frac{R_0}{\rho} (XF^{-1}P).$$

В системе координат общего положения $S_x = S_y = J_{xy} = 0$ и матрицы F и F^{-1} примут диагональный вид. В этой системе координат

$$\sigma = \frac{R_0}{\rho} \left(\frac{P}{F} + \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y} \right). \quad (8)$$

Принципиальное отличие формулы (8) от существующей в литературе состоит в том, что гиперболический закон распределения напряжений в сечении вдоль координаты x по формуле (8) характерен для всех слагаемых. Этот закон обусловлен различием длин волокон в начальном состоянии. В силу статической неопределимости задачи вычисления напряжений условие совместности деформаций приводит к поправке на различие в длинах волокон, которая определяется отношением среднего значения радиуса кривизны к радиусу кривизны данного волокна. В настоящее время считается, что эта поправка относится лишь к чистому изгибу кривого бруса в плоскости кривизны.

Вопрос о справедливости формулы (8) равносильен вопросу о выполнимости гипотезы плоских сечений в кривом брус при сложном сопротивлении и может быть решен только экспериментально. Обычное испытание на изгиб с растяжением и проверкой формулы (8) не дает ответа на этот вопрос, так как составляющая напряжения от продольной силы мала в сравнении с составляющей от изгиба и ее уточнение попадает в пределы погрешности измерения.

Для решения вопроса рассмотрим изгиб кривого бруса в плоскости, перпендикулярной к плоскости кривизны (рис. 1). Согласно формулам сопротивления материалов, для кривого бруса, имеющего форму кольца с радиусами: $R_n = 0,08$ м, внутренним $R_b = 0,04$ м и средним $R_0 = 0,06$ м, нормальные напряжения на поверхности кольца равны, так как $\sigma = M_x y / J_x$ и $\sigma_n = \sigma_b$ для $y_n = y_b = h/2$.

По полученной авторами формуле (8) $\sigma = \frac{M_x y}{J_x} \frac{R_0}{\rho}$ и для $y_n = y_b = h/2$

$$\sigma_n = \frac{M_x y_n}{J_x} \frac{0,06}{0,08} = 0,75 \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2},$$

$$\sigma_b = \frac{M_x y_b}{J_x} \frac{0,06}{0,04} = 1,5 \frac{M_x}{J_x} \frac{h}{2}.$$

Отсюда имеем, что нормальные напряжения на внутренних волокнах поверхности кольца в два раза больше, чем на наружных.

Для экспериментальной проверки справедливости формулы (8) была изготовлена установка, состоящая из стального кольца с наружным диаметром $D_n = 0,16$ м, внутренним $D_b = 0,08$ м и толщиной $h = 0,02$ м. С помощью

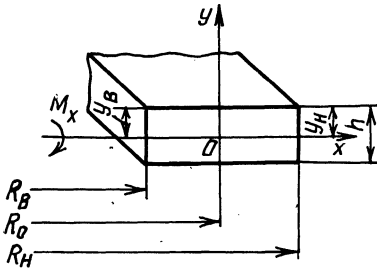


Рис. 1. Произвольное сечение кривого бруса

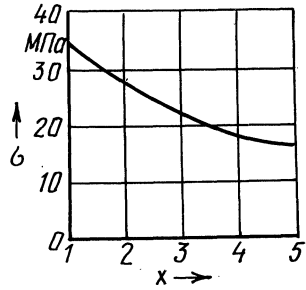


Рис. 2. График изменения величины напряжения по ширине кольца

болта, продетого в отверстие и втулку, кольцо жестко прикреплялось к подставке. На диаметрально противоположной стороне кольца с помощью шарика прикладывалась сосредоточенная сила $P = 2$ кН. В сечении, перпендикулярном к диаметральной силовой плоскости, измерялись напряжения в пяти точках на поверхности кольца с помощью проволочных датчиков омического сопротивления. По полученным данным построен график, приведенный на рис. 2.

Результаты измерений показали, что нормальные напряжения по ширине сечения подчинены гиперболическому закону и на внутренних волокнах напряжения в два раза больше, чем на наружных. Из этого следует, что более точной является формула (8).

Нормальные напряжения для толстостенных прямых и кривых брусьев относительно произвольных осей и начала координат определяются по формуле

$$\sigma = k(XF^{-1}P),$$

где P — матрица-столбец внутренних силовых факторов; X — матрица-строка координат исследуемой точки; F^{-1} — обратная матрица геометрических характеристик; k — коэффициент: $k = R_0/\rho$; R_0 — средний радиус кривизны; ρ — радиус кривизны волокна исследуемой точки. Для прямых брусьев коэффициент k следует принять равным 1.

Матричный вид формулы для определения напряжений обеспечивает большую компактность записи, универсальность, дает возможность для широкого использования ЭВМ в инженерных расчетах, так как программы перемножения и обращения матриц, а также нахождения их собственных значений входят в библиотеку стандартных подпрограмм большинства ЭВМ.

Для вычисления нормальных напряжений в произвольных осях сечения авторами составлена программа SIGMA на языке ФОРТРАН для ЭВМ ЕС 1035, с помощью которой можно определять напряжения при различных видах нагружения, а также для сечений разных степеней сложности.