

1. Григолюк Э.И. О равновесии и устойчивости биметаллических полос // Инж. сб. — 1950. — Т. 7. — С. 69–90. 2. Тимошенко С.П., Тере Дж. Механика материалов. — М., 1976. — 660 с. 3. Термические напряжения и деформации в биметаллах: Методические указания. — Мн., 1985. — 31 с.

УДК 534.1:620.178.3

В.Б. НЕМЦОВ, Н.А. ДОЛБИН, Ф.Ф. ЦАРУК,
И.Г. ДОВГЯЛЛО. Ю.Н. КОНДЕЕВ

К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН, КОЛЕБЛЮЩИХСЯ НА НИЗКИХ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ И ЗВУКОВЫХ ЧАСТОТАХ

Исследование сопротивления усталости элементов конструкций на низких ультразвуковых частотах имеет важное значение для объектов, подвергающихся действию высокочастотного нагружения на большой базе циклов изменения нагрузки. Хотя амплитуда колебаний высокой частоты и мала, однако их вклад в общий процесс накопления усталостных повреждений весьма значителен [1].

Используя высокую частоту нагружения, можно сократить затраты времени на проведение усталостных испытаний и определить характеристики выносливости материалов на базах вплоть до 10^{10} и более циклов за приемлемый промежуток времени [2].

При высокочастотном нагружении исследование процесса усталости обычно проводится на установках, работающих в резонансном режиме. В этом случае определение напряжений в образцах известными методами тензометрирования затруднительно из-за высокой частоты нагружения. В связи с этим важным является развитие методов расчета напряженного состояния пластинчатых образцов, поскольку при изгибных колебаниях на таких образцах легко реализуется напряженное состояние, характерное для большинства натуральных конструкций [3].

При резонансном режиме работы определение напряженного состояния сводится к анализу собственных форм колебаний, а соотношения между амплитудами смещений и напряжений устанавливаются законом Гука [4].

Уравнение колебаний однородной пластины постоянной толщины имеет вид

$$D \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

где $W = W(x, y)$ — функция смещения; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины; ρ и h — плотность и толщина пластины.

Для предварительной оценки характера амплитудной функции были проведены эксперименты с пластинами на серийных и специально разработанных

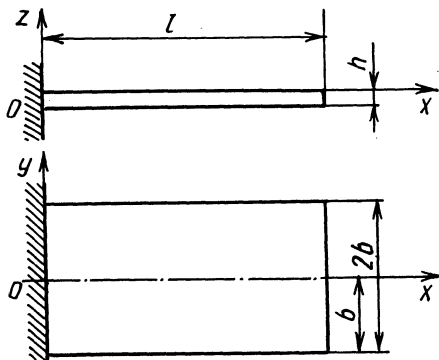


Рис. 1. Образец-пластинка

магнитострикционных установках с резонансными частотами 2,8, 8,8 и 18 кГц. Первоначальную длину пластины (рис. 1) определяли приблизительно, используя ее представление в виде консольной балки с жестким защемлением. С целью уменьшения влияния заделки, которое усиливается по мере роста частоты колебаний, эксперименты на ультразвуковых частотах ведут обычно на высших собственных формах колебаний. Для принятой нами второй формы в случае абсолютно жесткой заделки длина

консольной части определяется из выражения [4]

$$l_p \sqrt[4]{\frac{4\pi^2 f^2 \rho S}{EI}} = 4,694,$$

где f и S — соответственно частота колебаний и площадь поперечного сечения пластины. Однако из-за невозможности реализации идеальной заделки и приближенного знания динамических характеристик материала пластины ее резонансная длина, определенная по балочной модели, значительно отличалась от расчетной. Например, при принятом нами способе крепления образца к волноводу (концентратору — усилителю механических колебаний) с помощью болтового соединения и промежуточной высокотвердой пластины на частоте 18 кГц это различие составляло около 10 %.

Амплитуда колебаний точек пластины во время испытаний замерялась с помощью микроскопа с увеличением $480\times$. Микроскоп устанавливался на специальное устройство, которое посредством микрометрических винтов перемещалось по трем взаимно перпендикулярным осям, что позволяло с помощью окулярной сетки с известной ценой деления измерять смещения по всему периметру пластины.

На рис. 2 показан характер колебаний сечения пластины в поперечном направлении, из которого видно, что принятие балочной модели для последующих расчетов напряженного состояния пластины на частотах свыше 3 кГц привело бы к значительным погрешностям. В связи с этим прогиб пластины $W(x, y)$ был описан выражением

$$W(x, y) = A \varphi_m(x) \tilde{\varphi}_n(y),$$

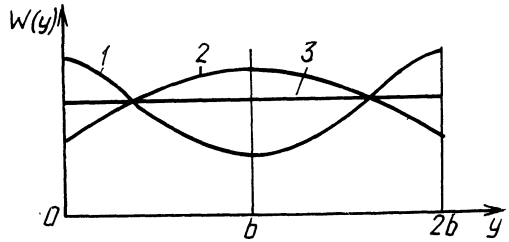
где A — некоторая заранее неизвестная константа; m и n — число узлов функций $\varphi_m(x)$ и $\tilde{\varphi}_n(y)$.

Балочную функцию $\varphi_m(x)$ выражаем через функции Крылова. Тогда функция смещения вдоль оси Ox будет иметь вид

$$\varphi_m(x) = U(k_m x) - \frac{S(k_m l)}{T(k_m l)} V(k_m x).$$

Рис. 2. Эпюры прогибов края пластинки в направлении оси Oy на разных частотах нагружения:

1 - $f = 18$ кГц; 2 - $f = 8,8$ кГц; 3 - $f = 2,8$ кГц



Функцию смещения вдоль оси Oy $\tilde{\varphi}_n(y)$ представим в виде линейной комбинации "жесткого" смещения (от прогиба вдоль оси Ox), характеризующегося некоторой константой a , зависящей от режима нагружения, и балочной функции $\varphi_n(y)$, умноженной на постоянную c , т. е.

$$\tilde{\varphi}_n(y) = a + c\varphi_n(y),$$

где

$$\varphi_n(y) = U(k_n y) - \frac{S(k_n b)}{T(k_n b)} V(k_n y).$$

Значения корней частотных уравнений $k_m l$ и $k_n b$ находим из условия наилучшего приближения опытных и расчетных значений амплитуд колебаний. Например, для частоты $f = 10$ кГц при $m = 2$ и $n = 1$ получаем $k_m l = 4,27$ и $k_n b = 1,6$, а для $f = 18$ кГц - $k_m l = 4,69$ и $k_n b = 2,95$ при $b = 15$ мм.

Отличие корней частотных уравнений для частот 10 и 18 кГц от приведенных в работе [4] объясняется невозможностью реализации абсолютно жесткой заделки. На частоте 2,8 кГц и ниже влияние заделки несущественно.

Для определения постоянных a и c используем относительные прогибы пластины при $x = l, y = b$ и $x = l, y = 0$. Тогда амплитудную функцию можно записать в следующем виде:

$$W_1 = \varphi_m(l) (a + c\varphi_n(0))$$

или

$$W_2 = \varphi_m(l) (a + c\varphi_n(b)).$$

Отсюда, учитывая, что $\varphi_n(0) = 0$, находим:

$$a = \frac{W_1}{\varphi_m(l)}, \quad c = \frac{W_2 - a\varphi_m(l)}{\varphi_n(b)\varphi_m(l)},$$

где W_1, W_2 - амплитуды колебаний, определяемые экспериментально в соответствующих точках.

С помощью приведенных выше выражений были рассчитаны прогибы пластины вдоль координатных осей для рассматриваемых значений частот, показанные на рис. 3. Экспериментальные кривые изображены штриховыми линиями. Сравнение расчетных и экспериментальных кривых показало их достаточно хорошую сходимость.

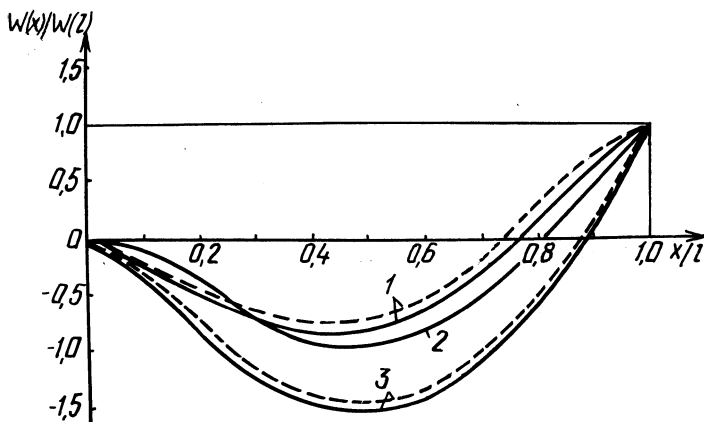


Рис. 3. Эшоры прогибов края пластинки в направлении оси Ox на разных частотах нагружения:

- 1 - $f = 18$ кГц;
 2 - $f = 2,8$ кГц;
 3 - $f = 8,8$ кГц

Величину циклических напряжений, действующих на поверхности пластины, определим по формулам [5]:

$$\sigma_x = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right).$$

Для плоского напряженного состояния интенсивность циклических напряжений найдем по формуле [6]

$$\sigma_s = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2}.$$

Для принятых частот был проведен сравнительный расчет напряженного состояния пластины по предложенной методике и по балочной модели, для которой $\sigma_s = 7,83fW \sqrt{\rho E}$.

Результаты расчета показали, что для частоты 2,8 кГц различие в значениях σ_s , подсчитанных по обеим методикам, составляло не более 1 %, а для $f = 18$ кГц оно возросло до 7,5 %.

Таким образом, приведенная методика расчета σ_s эффективна при частотах испытаний $f > 10$ кГц. По мере уменьшения частоты колебаний пластин указанных размеров их расчетные схемы могут быть с достаточной степенью точности заменены схемой балки, колеблющейся по тому же закону.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прочность материалов и элементов конструкций при звуковых и ультразвуковых частотах нагружения / Под ред. В.А. Кузьменко. - Киев, 1980. - 524 с. 2. Усталостные испытания на высоких частотах нагружения / Под ред. В.А. Кузьменко. - Киев, 1979. -

336 с. 3. Т р а п е з о н Л.Г. Расчет упругих элементов при резонансных усталостных испытаниях. — Киев, 1983. — 95 с. 4. Б а б а к о в И.М. Теория колебаний. — М., 1965. — 560 с. 5. Т и м о ш е н к о С.П. Колебания в инженерном деле. — М., 1967. — 32 с. 6. Б и р г е р И.А. Расчеты на прочность деталей машин: Справочник. — М., 1979. — 705 с.

УДК 539.319

Г.С. КРЫЛОВ, В.М. КОХАНОВСКАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ТОЛСТОСТЕННОГО БРУСА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОСЯХ

Для определения нормальных напряжений в произвольном сечении бруса по существующим формулам необходимо установить вид сопротивления, а также найти положение главных центральных осей сечения и вычислить геометрические характеристики относительно этих осей, что создает определенные неудобства, особенно для стержней со сложными составными сечениями.

Предлагаемая в данной статье формула для определения нормальных напряжений универсальна и позволяет получить решение в произвольной системе координат одновременно для всех видов сопротивления. Ее вывод основан на гипотезе плоских сечений и отсутствии бокового давления между волокнами бруса.

1. Рассмотрим прямой брус под действием произвольных нагрузок. Уравнения, определяющие внутренние силовые факторы через нормальные напряжения, имеют вид:

$$N = \int_A \sigma dA, \quad M_x = \int_A \sigma y dA, \quad M_y = \int_A \sigma x dA. \quad (1)$$

Согласно гипотезе плоских сечений, плоское поперечное сечение до деформации ($\Delta dz = 0$) остается плоским и после деформации ($\Delta dz = ax + by + c$). Параметры деформации a , b , c не могут быть одновременно равны нулю, если существует деформация.

Относительная деформация в окрестности рассматриваемого сечения

$$\epsilon = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{ax + by + c}{dz}.$$

На основании закона Гука и при отсутствии давления между волокнами бруса

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \sigma_z = \sigma = \epsilon E = \frac{ax + by + c}{dz} E. \quad (2)$$

Так как отношение $\frac{\sigma}{ax + by + c} = \frac{E}{dz}$ не зависит от координат точек в сечении, то уравнения (1) с учетом (2) примут вид: