УДК 519.6

М.Д. МАРТЫНЕНКО, В.А. КАЗАКЕВИЧ

МЕТОД КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ–МИТЧЕЛЛА

Уравнения движения однородного изотропного упругого тела в перемещениях имеют вид

$$\mu\Delta u_i + (\lambda + \mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_i} + X_i = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещения точек тела (функция от $x = (x_1, x_2, x_3)$ и времени t); $\theta = \operatorname{div}\mathbf{u}$; λ, μ – постоянные Ламе; $\rho = \mathrm{const}$ – плотность тела.

Используя известную линейную связь между деформациями и перемещениями, из уравнения (1) получаем

$$\mu\Delta\epsilon_{ij} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2\epsilon_0}{\partial x_i\partial x_j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i}\right) = \rho\frac{\partial^2\epsilon_{ij}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где $\epsilon_0 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$. Поэтому, согласно закону Гука, имеем

$$\Delta\sigma_{ij} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial t^2} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x_i\partial x_j} + \left(\frac{1}{c_2^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial t^2} + \zeta_{ij} = 0. \tag{3}$$

Здесь

$$\zeta_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} + \frac{\partial X_j}{\partial x_i} + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial X_k}{\partial x_k},$$

$$\sigma_0 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad \frac{1}{c_1^2} = \frac{\rho}{\lambda+2\mu}, \quad \frac{1}{c_2^2} = \frac{\rho}{\mu},$$

$\nu = \lambda/(2(\lambda+\mu))$ – коэффициент Пуассона.

В случае установившихся волновых процессов определение напряженно-деформированного состояния на основе уравнений (3) приводит к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\Delta\sigma_{ij} + \frac{k^2}{c_2^2}\sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2\sigma_0}{\partial x_i\partial x_j} - k^2\left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)\frac{\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_0 + \zeta_{ij} = 0. \tag{4}$$

Из (4) вытекает следующее уравнение для определения σ_0:

$$\Delta\sigma_0 + \kappa k^2\sigma_0 = \Phi_0, \tag{5}$$

где

$$\Phi_0 = \frac{1+\nu}{\nu-1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \quad ; \qquad \kappa = \frac{1-2\nu}{2+\nu} \frac{1}{c_2^2} + \frac{3\nu}{2+\nu} \frac{1}{c_1^2} .$$

Поскольку для реальных тел $0 < \nu < 1/2$, то коэффициент κ всегда положителен.

Система (4) может быть переписана в таком виде:

$$\Delta(\sigma_{ij} + \frac{1}{2(1+\nu)} x_i \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j}) + \frac{k^2}{c_2^2} \sigma_{ij} - \frac{1}{2(1+\nu)} x_i \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta\sigma_0 -$$

$$- k^2 (\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}) \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\sigma_0 + \zeta_{ij} = 0. \qquad (6)$$

Обозначим

$$v_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{2(1+\nu)} x_i \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j} . \qquad (7)$$

Тогда из уравнений (5) и (6) следует, что введенные функции v_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, являются решениями уравнений

$$(\Delta + \frac{k^2}{c_2^2}) v_{ij} = f_{ij} , \qquad (8)$$

где

$$f_{ij} = \frac{k^2}{2(1+\nu)} x_i (\frac{1}{c_2^2} - \kappa) \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j} + k^2 (\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}) \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\sigma_0 +$$

$$+ \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_j} - \zeta_{ij} . \qquad (9)$$

Поэтому v_{ij} в любой области $D \subset E_3$ с замкнутой гладкой поверхностью Ляпунова S представимы в виде

$$v_{ij}(x) = \int_S [\frac{\partial v_{ij}(\xi)}{\partial n} \Phi(x, \xi) - v_{ij}(\xi) \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial n}] d_\xi S -$$

$$- \int_D \Phi(x, \xi) (\Delta_\xi + \frac{k^2}{c_2^2}) v_{ij}(\xi) d\xi , \qquad (10)$$

где $\Phi(x, \xi) = \frac{1}{4\pi r} \exp(ikr/c_2)$; $r = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \xi_i)^2}$.

В силу известных соображений для любой гладкой функции $q(x, \xi)$ из (10) имеем

$$v_{ij}(x) = \int_S \Big\{ \frac{\partial v_{ij}(\xi)}{\partial n} [\Phi(x, \xi) - q(x, \xi)] - v_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial n} [\Phi(x, \xi) -$$

$$- q(x,\xi)]\Big\} d_\xi S - \int_D v_{ij}(\xi)(\Delta_\xi + \frac{k^2}{c_2^2}) q(x,\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_D [\Phi(x,\xi) - q(x,\xi)](\Delta_\xi + \frac{k^2}{c_2^2}) v_{ij}(\xi)\, d\xi . \tag{11}$$

Положим

$$G(x,\xi) = \Phi(x,\xi) - q(x,\xi), \tag{12}$$

$$q(x,\xi) = \frac{1}{4\pi\tilde{r}} \exp(ik\tilde{r}/c_2), \tag{13}$$

где $\tilde{r} = \sqrt{r^2 + 4\omega(x)\omega(\xi)}$; $\omega(x) = 0$ $(x \in S)$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы области D, причем $\omega(x) > 0$ для $x \in D \backslash S$. В этом случае $G(x,\xi) = 0$ для $x \in S$. Тогда из уравнения (11) с учетом (8), (12), (13) имеем

$$v_{ij}(x) = -\int_S v_{ij}(\xi) \frac{\partial}{\partial n} G(x,\xi)\, d_\xi S - \int_D G(x,\xi) f_{ij}(\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_D v_{ij}(\xi)\, (\Delta_\xi + \frac{k^2}{c_2^2})\, q(x,\xi) d\xi . \tag{14}$$

Исследование особенностей ядра $K(x,\xi) = (\Delta_\xi + k^2/c_2^2)\, q(x,\xi)$ показывает, что для его непрерывности функцию ω нужно выбрать в виде

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 X + \omega_0^3 \Psi ,$$

где

$$X = \frac{1}{8}(2\Delta\omega_0 - 3\Phi_0) ;$$

$$\Psi = \frac{1}{3}(3X\Delta\omega_0 - 4\Phi_0 X - 4X^2 + (\nabla\omega_0, \nabla X)) ;$$

$$\Phi_0 = \omega_0^{-1}[(\nabla\omega_0)^2 - 1] ;$$

ω_0 – какая-либо нормализованная функция для S.

Формула (14) служит основой для вывода граничных интегродифференциальных уравнений второй основной задачи теории упругости (задачи в напряжениях). При этом граничные условия имеют вид [1, 2]

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\Big|_S - \rho X_i = 0, \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j \Big|_S = T_{n_i} , \tag{15}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – внешняя нормаль к S.

С учетом обозначения (7) формула (14) примет вид

$$\sigma_{ij}(x) + \frac{1}{2(1+\nu)} x_i \frac{\partial \sigma_0}{\partial x_j} = - \int_S [\sigma_{ij}(\xi) + \frac{1}{2(1+\nu)} \xi_i \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi_j}] \frac{\partial G(x,\xi)}{\partial n} d_\xi S -$$

$$- \int_D [\sigma_{ij}(\xi) + \frac{1}{2(1+\nu)} \xi_i \frac{\partial \sigma_0}{\partial \xi_j}](\Delta_\xi + \frac{k^2}{c_2^2})\, q(x,\xi)\, d\xi -$$

$$- \int_D G(x,\xi) f_{ij}(\xi)\, d\xi \,, \qquad (16)$$

где f_{ij} определено формулой (9).

Представления (16) с учетом граничных условий (15) позволяют определить σ_{ij} как внутри области D, так и на ее границе (на основании обычных рассуждений метода граничных интегральных уравнений).

ЛИТЕРАТУРА

1. Победря Б.Е. Новая постановка задач МДТТ в напряжениях // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 253, № 2. – С. 295–297. 2. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М., 1981. – 344 с.

УДК 624.072

Г.Ф. ЕРШОВ, Э.Г. КОСЫХ, И.А. ТАВГЕНЬ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТЧАТОГО КУПОЛА С НЕРЕГУЛЯРНОЙ РЕШЕТКОЙ

При проектировании многоэлементных сетчатых куполов значительный практический интерес представляет исследование несущей способности отдельных элементов, входящих в состав всей конструкции. Кроме того, для куполов с нерегулярной решеткой влияние нерегулярности расположения стержней по поверхности сферы также целесообразно исследовать на отдельных элементах конструкции.

В данной статье введен параметр, оценивающий нерегулярность расположения элементов сетчатого купола, и проводится анализ устойчивости характерных фрагментов купола с нерегулярной решеткой.

Исследуемые модели имели вид пологой решетчатой оболочки, вписанной в шаровой сегмент диаметром 1 м. Модель собиралась из отдельных треугольных элементов, изготовленных из стали марки 16 ГС, толщиной 0,5 мм. Отдельные элементы модели изготавливались методом штамповки. При этом высота ребра одного стержня равнялась 1,2 см, а ширина полки – 0,6 см. Сборка модели осуществлялась путем соединения 20–24-х единичных треугольных элементов в укрупненные фрагменты с помощью болтов М3 с последующей пропайкой швов. Высота двухъярусных фрагментов была 7,2–9,4 см. Фрагменты опирались в 10–12 точках. С целью исследования влияния гранич-