циональных уравнений) // Мат. сб. – 1934. – Т. 41, № 2. – С. 246–276. 2. Бухаринов Г.Н. Решение плоской задачи теории упругости для диска, снабженного круговыми отверстиями // Ученые записки ЛГУ. Сер. Математика. – 1939. – № 44, вып. 8. – С. 56–70. 3. Митюшев В.В. О решении краевой задачи Маркушевича для многосвязной круговой области // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1985. – № 1. – С. 119–120. 4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. – М., 1974. – 640 с. 5. Ван Фо Фы А.С. Теория армированных материалов с покрытиями. – Киев, 1971. – 232 с. 6. Лаврентьев М.А., Шабот Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М., 1973. – 736 с. 7. Митюшев В.В. Об одном применении метода неполной факторизации // Докл. АН БССР. – 1986. – Т. 29, № 8. – С. 688–690. 8. Kuczma M. Functional equations in a single variable. – Warszawa, 1968. – 383 p.

УДК 539.3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, Е.П. ЖУРАВКОВА

РЕШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА

В данной статье дается дальнейшее развитие метода квазифункций Грина [1, 2] применительно к задачам определения напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела.

Рассмотрим задачу о квазистатическом состоянии вязкоупругого тела D с границей S [3], подверженного силовым и кинематическим воздействиям. На части границы S_1 заданы перемещения $g(x, t) = \{g_i\}$, $i = 1, ..., m$ (где $m = 2$ или $m = 3$), t – время; на части S_2 – поверхностные силы $T(x, t) \equiv \{T_i\}$, $i = 1, ..., m$; на остальной части S_3 – любые m функций из $\{g_i, T_i\}$ с несовпадающими индексами. Пусть материал тела D является однородным изотропным и стабильным с постоянным коэффициентом Пуассона ν, начальным модулем сдвига G_0, функцией сдвиговой релаксации $G(t)$, функцией сдвиговой ползучести $J(t)$. При этом связь между напряжениями $\sigma_{ij}(x, t)$ и деформациями $\epsilon_{ij}(x, t)$, между функцией релаксации $G(t)$ и функцией ползучести $J(t)$ определяется стандартными соотношениями [3, 4]. Будем рассматривать случай малых деформаций и предположим, что $u_i(x, t)$, $\epsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ равны нулю при $t < 0$ и кусочно-непрерывны при $t \geqslant 0$. Аналогичное предположение вводится и для действующих на тело D объемных сил $X_i(x, t)$, $i = 1, ..., m$.

Введем, согласно [4], фиктивные упругие перемещения u_i^y и деформации ϵ_{ij}^y, определяемые следующим образом:

$$u_i^y(x, t) = u_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau)\, u_i(x, \tau)\, d\tau , \tag{1}$$

$$\epsilon_{ij}^y(x, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}^y + u_{j,i}^y). \tag{2}$$

Обозначим

$$g_i^y(x, t) = g_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t-\tau)\, g_i(x, \tau)\, d\tau . \tag{3}$$

Использовав представления (1) – (3), основные соотношения вязкоупругости и процедуру построения разрешающих уравнений метода квазифункций Грина, описанную в работе [2] и связанную с нахождением функций u_i^y, получим

$$u_i^y(x) = -\frac{1}{2(m-1)\pi}\int_S u_i^y(\xi)\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial n_\xi}d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{2(m-1)\pi}\int_D u_i^y(\eta)\Delta_\eta q(x,\eta)\,d_\eta D - \frac{1}{2(m-1)\pi}\int_D\sum_{j=1}^m u_{i,j}^y(\eta)F(x,\eta)\,d_\eta D -$$

$$-\frac{1}{2(m-1)\pi}\int_D\frac{X_i(\eta)}{G_0}F(x,\eta)\,d_\eta D, \tag{4}$$

где $F(x, \xi)$ – квазифункция Грина [1, 2].

Для выделения единственного решения системы (4) воспользуемся соответствующими граничными условиями на $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, которые в общем случае имеют вид

$$u_i^y(x) = g_i^y(x), \quad x \in S, \tag{5}$$

$$G_0(u_{i,j}^y + u_{j,i}^y) + \frac{2\nu}{1-2\nu}G_0 u_{k,k}^y\delta_{ij}]n_j = T_i, \quad i = 1, ..., m, \tag{6}$$

а на части S_3 поверхности S представляют собой совокупность любых m условий вида (5) или (6) в зависимости от конкретной практической задачи. Отметим, что в уравнениях (6) вместо u_i^y подразумевается использование представления (4).

После решения вспомогательной упругой задачи (4) – (6) и определения фиктивных перемещений $u_i^y(x, t)$ истинные перемещения $u_i(x, t)$ находят по формуле [4]

$$u_i(x,t) = u_i^y(x,t) + \frac{1}{J_0}\int_0^t \dot{J}(t-\tau)\,u_i^y(x,\tau)\,d\tau.$$

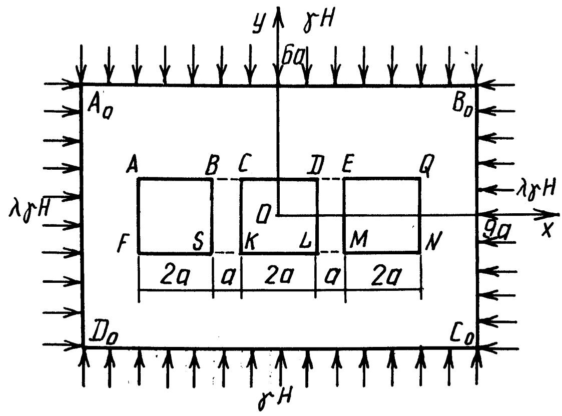
Следует отметить, что получаемые в процессе решения вспомогательной упругой задачи напряжения являются истинными напряжениями исходной вязкоупругой задачи.

С помощью выведенной системы разрешающих уравнений была решена задача И.А. Прусова об определении суммарного давления на межкамерные целики [5] в модифицированной постановке: изучалось изменение данного суммарного давления с течением времени (рис. 1). Согласно [6], функцию скорости ползучести для соляных месторождений можно аппроксимировать двухпараметрическим ядром Абеля. Тогда функция скорости релаксации будет иметь представление

$$\dot{G}(t) = G_0/(1 + at^{1-\alpha^*}),$$

где $a = \delta^*/(1 - \alpha^*)$. Постоянные α^* и δ^* определяют по итогам обработки экспериментальных данных, полученных в результате проведения опытов в

Рис. 1. Расчетная схема задачи об определении суммарного давления на межкамерные целики



условиях конкретного месторождения. При решении вышеупомянутой задачи из работы [6] были взяты значения постоянных α^* и δ^*, характерные для калийных месторождений Солигорского бассейна: $\alpha^* = 0{,}8$, $\delta^* = 0{,}025$. Ниже приведено изменение суммарного давления P_0 на целики с течением времени:

$$P_0(t = 0) \approx 1{,}99a\gamma\ H/E\ ; \quad P_0(t = 30\ \text{сут}) \approx 1{,}597a\gamma H/E\ ;$$

$$P_0(t = 90\ \text{сут}) \approx 1{,}522a\gamma H/E; \ \ P_0(t = 180\ \text{сут}) \approx 1{,}471a\gamma H/E\ ;$$

$$P_0(t = 360\ \text{сут}) \approx 1{,}4157a\gamma H/E.$$

Отметим, что вычисленное И.А. Прусовым значение P_0 в упругой начальной стадии равно $2{,}05a\gamma H/E$.

Предложенный способ применим для решения прикладных задач вязкоупругости, а получаемые при этом результаты достаточно точны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В.Л., П р о ц е н к о В.С. Метод квазифункций Грина // Актуальные проблемы механики деформируемых сред. – Днепропетровск, 1979. – С. 188–196 . 2. М а р т ы н е н к о М.Д., Ж у р а в к о в М.А. Решение смешанной задачи теории упругости методом В.Л. Рвачева квазифункций Грина // Мат. методы анализа динамических систем. – Харьков, 1985. – С. 137–141. 3. И л ь ю ш и н А.А., П о б е д р я Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М., 1970. – 230 с. 4. У г о д ч и к о в А.Г., Н и к о л а е в О.П., Х у т о р я н с к и й Н.М. Расчеты и испытания на прочность: Методические рекомендации. – Горький, 1985. – 32 с. 5. П р у с о в И.А. К вопросу о давлении на стержни, установленные внутри отверстия равномерно растянутой пластинки // Исследования горного давления. – М., 1960. – С. 42–48. 6. П р о с к у р я к о в Н.М., П е р м я к о в Р.С., Ч е р н и к о в А.К. Физико-математические свойства соляных пород. – Л., 1973. – 272 с.