

Зависимость первых двух частот колебаний от приведенной толщины части внешнего теплозащитного слоя h_1 , оставшейся после абляции, и толщины заполнителя h_3 показана на рис. 1 и 2. Величина теплового потока q_f подбиралась таким образом, чтобы температура на поверхности теплозащитного слоя достигала предельных значений эксплуатации кордиерита: 1000...1200 К. Зависимость частот от температуры наблюдается при сравнительно тонких внешних защитных слоях $h_1 \leq 0,001$, $h_2 = 0,005$, $h_3 = 0,3$ (см. рис. 1). При исследовании зависимости частот от толщины заполнителя полагалось, что $h_2 = 2h_1 = 0,005$. В этом случае вся теплота, полученная пластинкой, реализуется в защитном слое в относительно малой его верхней части. Поэтому в данном случае кривые для частот при изотермических и неизотермических колебаниях практически совпали.

ЛИТЕРАТУРА

1. Старовойтов Э.И. Изгиб круглой трехслойной пластинки в условиях абляции // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 112–118. 2. Дидковский В.С., Старовойтов Э.И., Старовойтова Т.А. О колебаниях упругой двухслойной пластинки // Пробл. прочности. – 1984. – № 6. – С. 28–31. 3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М., 1951. – Т. 1. – 360 с. 4. Старовойтов Э.И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 11–15.

УДК 539.3.01

В.В. МИТЮШЕВ

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работах [1, 2] были решены плоские задачи теории упругости для круговых областей с помощью применения одного варианта метода функциональных уравнений. В работе [3] этот метод был развит и применен к более сложным задачам. В настоящей статье решается задача о трещине, моделируемой лучом, в среде с включением специального вида. Для краткости изложения рассматривается случай продольного сдвига, т. е. $K_I = K_{II} = 0$, $K_{III} \neq 0$ [4, с. 74]. Эту статью можно рассматривать как простейший пример, иллюстрирующий возможности метода функциональных уравнений в теории трещин.

Рассмотрим продольный сдвиг кусочно-однородного изотропного материала, все сечения которого, перпендикулярные к оси Ox_1 , изображены на рис. 1. Здесь Γ – полубесконечный разрез вдоль действительной оси от точки $w = 1$ до точки $w = \infty$ комплексной плоскости, D_1 – включение с модулем упругости μ_1 , $L = \left\{ \xi \in \mathbb{C}, \left| \frac{\xi}{2 - \xi + 2\sqrt{1 - \xi}} \right| = r \right\}$ – граница области D_1 , r ($0 <$

$< r < 1$) – некоторый параметр. Упругая матрица с модулем упругости μ занимает область D – внешность луча Γ и контура L . Контакт между матрицей и включением идеальный. К контуру Γ приложены касательные напряжения.

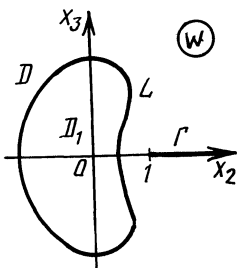


Рис. 1. Сечение рассматриваемого материала

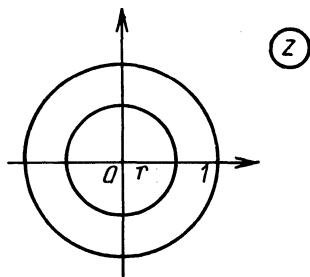


Рис. 2. Образец сечения при конформном отображении

Требуется определить распределение напряжений на плоскости w . Имеет место формула [5, с. 84]:

$$\sigma_{12} - i\sigma_{13} = \begin{cases} 2\mu\Phi'(w), & w \in D, \\ 2\mu_1\Phi_1'(w), & w \in D_1, \end{cases} \quad (1)$$

где функция $\Phi(w)$ — аналитическая в области D , а функция $\Phi_1(w)$ — в области D_1 .

Касательные напряжения на контуре Γ выражаются через функцию $\Phi(w)$ по формуле [5, с. 85]:

$$T = -i\mu \frac{d}{ds} [\Phi(w) - \overline{\Phi(w)}],$$

где s — натуральный параметр контура Γ . Краевое условие на луче Γ примет вид

$$\Phi(\xi) - \overline{\Phi(\xi)} = F(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \quad (2)$$

где $F(\xi)$ — известная гельдеровская функция, связанная с заданными на контуре Γ напряжениями соотношением

$$F(\xi) = \frac{i}{\mu} \int_{\Gamma} \sigma_{12} ds.$$

Искомую функцию $\Phi(w)$ полагают ограниченной при стремлении w к единице и бесконечности. На контуре L выполняется условие R -линейного сопряжения [5, с. 86]:

$$\Phi(\xi) = \frac{\mu + \mu_1}{2\mu} \Phi_1(\xi) + \frac{\mu - \mu_1}{2\mu} \overline{\Phi_1(\xi)}, \quad \xi \in L. \quad (3)$$

Лемма 1. Задача (2)–(3) имеет единственное решение, принадлежащее требуемому классу, с точностью до действительной постоянной.

Отобразим конформно внешность луча Γ на круг $|z| < 1$ (рис. 2) с помощью функции $z = w/(2 - w + 2\sqrt{1-w})$. Обратное отображение имеет вид [6, с. 122] $w = 4z/(1+z)^2$.

Введем новые неизвестные функции $\varphi(z) = \Phi(w)$, $\varphi_1(z) = \Phi_1(w)$, аналитические в кольце $r < |z| < 1$ и круге $|z| < r$ соответственно. Задача (2)–(3) примет вид

$$\varphi(t) = \frac{\mu + \mu_1}{2\mu} \varphi_1(t) + \frac{\mu - \mu_1}{2\mu} \overline{\varphi_1(t)}, \quad |t| = r,$$

$$\varphi(t) - \overline{\varphi(t)} = f(t), \quad |t| = 1,$$

где $f(t) = F(4t/(1+t)^2)$. Последняя задача сводится к функциональному уравнению [7]

$$\varphi_1(z) = \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \varphi_1(r^2 z) + \frac{2\mu}{\mu + \mu_1} f^+(z) + Q, \quad |z| < r,$$

где

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau;$$

Q – произвольная действительная постоянная. В конечном счете для определения напряжений по формуле (1) понадобится функция $\varphi'_1(z)$, поэтому, продифференцировав функциональное уравнение, имеем

$$\varphi'_1(z) = r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \varphi'_1(r^2 z) + \frac{2\mu}{\mu + \mu_1} f'^+(z), \quad |z| < r.$$

В полученное функциональное уравнение постоянная Q уже не входит. Из него найдем функцию $\varphi'_1(z)$ в виде ряда, сходящегося абсолютно и равномерно на любом компакте из круга $|z| < r$ [8]:

$$\varphi'_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m f'^+(r^2 m z), \quad |z| < r.$$

По функции $\varphi'_1(z)$ восстанавливается функция $\varphi'(z)$ (функция $\varphi'_1(z)$ аналитически продолжается в единичный круг) и, следовательно, функция $\Phi'(w)$:

$$\varphi'(z) = \frac{\mu + \mu_1}{2\mu} \varphi'_1(z) - \frac{r^2}{z^2} \frac{\mu - \mu_1}{2\mu} \overline{\varphi'_1\left(\frac{r^2}{z}\right)},$$

$$\Phi'(w) = \frac{1}{\sqrt{1-w}} \varphi'\left(\frac{w}{2-w+2\sqrt{1-w}}\right).$$

Коэффициент интенсивности находится из соотношения [4, с. 73]:

$$K_{III} = \sqrt{2\pi(1-w)} \left. \mu i \Phi'(w) \right|_{w=1}.$$

Имеет место соотношение

$$\Phi'(w) \sqrt{1-w} \Big|_{w=1} = \varphi'(1),$$

a

$$\begin{aligned} \varphi'(1) &= \frac{\mu + \mu_1}{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m f^{+'}(r^{2m}) - \\ &- r^2 \frac{\mu - \mu_1}{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m \overline{f^{+'}(r^{2m})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K_{\text{III}} &= \sqrt{2\pi} \mu i \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\mu + \mu_1}{2\mu} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m f^{+'}(r^{2m}) - \right. \\ &\left. - r^2 \frac{\mu - \mu_1}{2\mu} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m \overline{f^{+'}(r^{2m})} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Лемма 2. При $-1 \leq z \leq 1$ имеет место равенство

$$f^{+'}(z) + \overline{f^{+'}(z)} = 0.$$

Пользуясь леммой 2, преобразуем формулу (4) к виду

$$K_{\text{III}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} i [\mu(1-r^2) + \mu_1(1+r^2)] \sum_{m=0}^{\infty} \left(r^2 \frac{\mu - \mu_1}{\mu + \mu_1} \right)^m f^{+'}(r^{2m}). \quad (5)$$

Рассмотрим случай, когда к разрезу Γ приложены напряжения $\sigma_{1z} = \sigma/\xi^2$. Тогда функция $f(t)$ имеет вид

$$f(t) = \frac{i\sigma}{\mu} \left[\frac{(1+t)^2}{4t} - 1 \right].$$

Функция $f^+(z)$ вычисляется с помощью вычетов:

$$f^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{i\sigma}{\mu} \left[\frac{(1+\tau)^2}{4\tau} - 1 \right] \frac{d\tau}{\tau-z} = \frac{i\sigma}{4\mu} (z-2).$$

Тогда $f^{+'}(z) = \frac{i\sigma}{4\mu}$. Отсюда по формуле (5)

$$K_{\text{III}} = -\sqrt{\pi/2} \sigma (\mu + \mu_1) / (4\mu).$$

Отметим, что в данном случае K_{III} не зависит от параметра r , характеризующего величину включения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л у з и н Г.М. Решение основных плоских задач математической физики для уравнения Лапласа и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функ-

циональных уравнений) // *Мат. сб.* — 1934. — Т. 41, № 2. — С. 246–276. 2. Б у х а р и н о в Г.Н. Решение плоской задачи теории упругости для диска, снабженного круговыми отверстиями // *Ученые записки ЛГУ. Сер. Математика.* — 1939. — № 44, вып. 8. — С. 56–70. 3. М и т ю ш е в В.В. О решении краевой задачи Маркушевича для многосвязной круговой области // *Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.* — 1985. — № 1. — С. 119–120. 4. Ч е р е п а н о в Г.П. Механика хрупкого разрушения. — М., 1974. — 640 с. 5. В а н Ф о Ф ы А.С. Теория армированных материалов с покрытиями. — Киев, 1971. — 232 с. 6. Л а в р е н т ь е в М.А., Ш а б о т Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М., 1973. — 736 с. 7. М и т ю ш е в В.В. Об одном применении метода неполной факторизации // *Докл. АН БССР.* — 1986. — Т. 29, № 8. — С. 688–690. 8. К у с з т а М. *Functional equations in a single variable.* — Warszawa, 1968. — 383 p.

УДК 539,3

М.Д. МАРТЫНЕНКО, Е.П. ЖУРАВКОВА

РЕШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КВАЗИФУНКЦИЙ ГРИНА

В данной статье дается дальнейшее развитие метода квазифункций Грина [1, 2] применительно к задачам определения напряженно-деформированного состояния вязкоупругого тела.

Рассмотрим задачу о квазистатическом состоянии вязкоупругого тела D с границей S [3], подверженного силовым и кинематическим воздействиям. На части границы S_1 заданы перемещения $g(x, t) = \{g_i\}$, $i = 1, \dots, m$ (где $m = 2$ или $m = 3$), t — время; на части S_2 — поверхностные силы $T(x, t) \equiv \{T_i\}$, $i = 1, \dots, m$; на остальной части S_3 — любые m функций из $\{g_i, T_i\}$ с несходящимися индексами. Пусть материал тела D является однородным изотропным и стабильным с постоянным коэффициентом Пуассона ν , начальным модулем сдвига G_0 , функцией сдвиговой релаксации $G(t)$, функцией сдвиговой ползучести $J(t)$. При этом связь между напряжениями $\sigma_{ij}(x, t)$ и деформациями $\epsilon_{ij}(x, t)$, между функцией релаксации $G(t)$ и функцией ползучести $J(t)$ определяется стандартными соотношениями [3, 4]. Будем рассматривать случай малых деформаций и предположим, что $u_i(x, t)$, $\epsilon_{ij}(x, t)$, $\sigma_{ij}(x, t)$ равны нулю при $t < 0$ и кусочно-непрерывны при $t \geq 0$. Аналогичное предположение вводится и для действующих на тело D объемных сил $X_i(x, t)$, $i = 1, \dots, m$.

Введем, согласно [4], фиктивные упругие перемещения u_i^y и деформации ϵ_{ij}^y , определяемые следующим образом:

$$u_i^y(x, t) = u_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t - \tau) u_i(x, \tau) d\tau, \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij}^y(x, t) = \frac{1}{2} (u_{ij}^y + u_{ji}^y). \quad (2)$$

Обозначим

$$g_i^y(x, t) = g_i(x, t) + \frac{1}{G_0} \int_0^t \dot{G}(t - \tau) g_i(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$