инки. – М., 1957. – 463 с. 3. Королевич В.В. Напряженное состояние диска с прямоугольной анизотропией, вращающегося вокруг диаметра // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 118–122. 4. Швецов В.А., Асафьева О.Н. Равномерное вращением круглой ортотропной пластинки с круговым отверстием // Механика деформируемых сред. – Горький, 1974. – Вып. 2. – С. 165–174. 5. Кравцов В.Ф. Напряжения в квадратной пластинке, вращающейся вокруг оси симметрии, расположенной в срединной плоскости // Прикл. теория упругости. – Саратов, 1983. – С. 91–97.

*УДК 539.3:519.63*

**В.Н. АПАНОВИЧ**

# СХОДИМОСТЬ ВНЕШНИХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Метод конечных элементов широко применяется для аппроксимации разрешаемых в пространствах Соболева $H^m(\Omega)$ вариационных уравнений краевых задач механики [1]. В данной статье исследуются внешние аппроксимации решений вариационных задач, построенные с использованием согласованных по подпространству конечных элементов (КЭ), предложенных в работах [2, 3]. Аппроксимирующие функции из соответствующих пространств КЭ разрывны на межэлементных границах разбиения области.

1. При использовании вариационных формулировок краевых задач механики решение последних сводится к нахождению некоторой функции $u \in W$, удовлетворяющей вариационному уравнению

$$a(u, v) = f(v) \qquad \forall v \in W, \tag{1}$$

где $W$ – замкнутое подпространство из $V = H^m(\Omega)$; $f(v)$ – некоторая линейная форма на $W$; $a(u, v)$ – непрерывная на $V \times V$ билинейная форма

$$a(u, v) = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_{\Omega} a_{pq}(x) D^p u D^q v \, dx \, . \tag{2}$$

Построим внешнюю аппроксимацию уравнения (1). В соответствии с требованиями работы [2] произведем разбиение $\tau$ области $\overline{\Omega}$ на КЭ $K$ и определим пространства

$$\left.\begin{aligned}
\overline{V} &= \prod_K H^m(K), \quad \overline{V}_0 = \prod_K H^m_0(K), \\
H &= \prod_K L^2(K) = L^2(\Omega), \quad V_h = R^{N(h)}, \\
\overline{T} &= \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial K_{r,l}), \\
H_T &= \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} L^2(\partial K_{r,l}),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $K \in \tau$; $\partial K_r \in M(\partial K_r)$; $\partial K_{r,l} \in M(\partial K_{r,l})$; $M(\partial K_r)$ – множество граней $\partial K_r$ КЭ; $M(\partial K_{r,l})$ – множество гладких участков $\partial K_{r,l}$ грани $\partial K_r$ КЭ.

Определим также аппроксимирующее $\overline{V}$ пространство $X_h$ КЭ:

$$X_h = \prod_K P_h^K \ , \quad K \in \tau \ ,$$

где $P_h^K \subset H^m(K)$ – некоторые конечномерные подпространства, и оператор следов для разбиения области

$$\overline{\gamma} = \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} \gamma_{r,l,j}^K \ ,$$

где $\gamma_{r,l,j}^K$ – оператор дифференцирования порядка $j$ по нормали к гладкому участку $\partial K_{r,l}$ грани $\partial K_r$ КЭ.

Оператор продолжения $p_h$ : $u_h \in V_h \to p_h u_h \in X_h$ определяется вложением $X_h \subset \overline{V}$.

Функции из пространства $X_h$ согласованных по подпространству КЭ удовлетворяют соотношению [2, 3]

$$(g_h \, , \overline{\gamma} p_h u_h)_{H_T} = 0 \qquad \forall g_h \in G_h \, , \quad \forall p_h u_h \in X_h \ , \tag{4}$$

где $G_h = \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} G_{r,l,j}^K(h) \subset H_T$ – семейство конечномерных пространств граничных аппроксимирующих функций.

Продолжение формы (2) на $\overline{V} \times \overline{V}$ определим выражением

$$\overline{a}(\overline{u}, \overline{v}) = \sum_K \sum_{|p|,|q|=0}^{m} \int_K a_{pq}(x) D^p u^K D^q v^K dx \tag{5}$$

**Утверждение.** Пусть выполнены следующие условия:

1) пространство $\overline{V}$ и билинейная форма $\overline{a}(\overline{u}, \overline{v})$ на $\overline{V} \times \overline{V}$ определены соотношениями (3) и (5), $\overline{W} \subset \overline{V}$ – замкнутое подпространство, форма $\overline{a}(\overline{u}, \overline{v})$ является $\overline{W}$-эллиптической, т. е. существует постоянная $C$, такая, что

$$\overline{a}(\overline{u}, \overline{v}) \geqslant c \, \|\overline{v}\|_{\overline{V}}^2 \qquad \forall \overline{v} \in \overline{W} ; \tag{6}$$

2) элемент $\overline{f} \in \overline{W}'$ задан и $u \in W$ – решение вариационной задачи

$$a(u, v) = \overline{f}(v) \qquad \forall v \in W ; \tag{7}$$

3) конечноэлементные аппроксимации $(V_h, p_h, r_h)$ пространства $\overline{W}$ являются внешними сходящимися аппроксимациями пространства $\overline{W}$;

4) $u_h \in V_h$ – решение дискретной вариационной задачи

$$\overline{a}(p_h u_h \, , \, p_h v_h) = \overline{f}(p_h v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \ , \tag{8}$$

которая является внешней аппроксимацией задачи (7).

Тогда задачи (7) и (8) имеют единственные решения $u$ и $u_h$ соответственно, $\lim_{h \to 0} \|u - p_h u_h\|_{\overline{V}} = 0$.

Доказательство утверждения непосредственно следует из более общей теоремы 11.2.1 [1].

2. Определим факторы, оказывающие решающее влияние на скорость сходимости внешних конечноэлементных аппроксимаций вариационных уравнений.

В силу неравенства (6) и вложения $p_h v_h \in X_h \in \overline{V}$ билинейная форма $a(\overline{u}, \overline{v})$ является $V_h$-эллиптической, т. е. $\exists\, \alpha > 0\ \forall V_h$, $\forall v_h \in V_h$ $\overline{a}(p_h v_h, p_h v_h) \geqslant \alpha \| p_h v_h \|^2_{\overline{V}}$.

Тогда, согласно теореме 4.2.2 [4], существует не зависящая от пространства $V_h$ постоянная $C$, такая, что

$$\| u - p_h u_h \|_{\overline{V}} \leqslant C( \inf_{p_h v_h \in X_h} \| u - p_h v_h \|_{\overline{V}} + d_h(u)) , \tag{9}$$

где $u$ и $u_h$ — решения задач (7) и (8) соответственно;

$$d_h (u) = \sup_{p_h w_h \in X_h} \frac{| \overline{a}(u, p_h w_h) - \overline{f}(p_h w_h)|}{\| p_h w_h \|_{\overline{V}}} . \tag{10}$$

Величина первого члена в правой части неравенства (9) определяется гладкостью точного решения $u$ задачи (7) и аппроксимативными свойствами функций из пространств $P_h^K$, приближающих функцию $u$ на КЭ. Выясним факторы, определяющие величину $d_h(u)$.

Формальные операторы $\Lambda$ и $\overline{\Lambda}$, порождаемые формами (2) и (5), находятся из следующих соотношений:

$$\Lambda u = \sum_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|q|} D^q (a_{pq}(x) D^p u) ,$$

$$\overline{\Lambda} \overline{u} = \prod_{K} \prod_{|p|,|q|=0}^{m} (-1)^{|q|} D^q (a_{pq}(x) D^p u^K) .$$

Для пространств (3), оператора $\overline{\gamma}$ и формы $\overline{a}(\overline{u}, \overline{v})$ выполняются предположения теоремы 6.2.1 [1] и, следовательно, существует единственный оператор $\overline{\delta}$, такой, что справедлива формула Грина

$$\overline{a}(\overline{u}, \overline{v}) = (\overline{\Lambda} \overline{u}, \overline{v}) + \langle \overline{\delta} \overline{u}, \overline{\gamma} \overline{v} \rangle \quad \forall\, \overline{u}, \overline{v} \in \overline{V}, \tag{11}$$

где $\langle \overline{\delta} \overline{u}, \overline{\gamma} \overline{v} \rangle$ — отношение двойственности на $\overline{T}' \times \overline{T}$;

$$\overline{\delta} = \prod_{K} \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=2m-1}^{m} \delta^K_{r,l,j} ,$$

$$\delta^K_{r,l,j} \in L (H^m (K) , H^{m-j-1/2} (\partial K_{r,l})), \quad m \leqslant j \leqslant 2m-1.$$

Для определенности рассмотрим однородную задачу Дирихле для оператора $\Lambda$: найти $u \in V(\Lambda)$, удовлетворяющее уравнениям:

$$\Lambda u = \bar{f}, \quad \gamma u = 0, \tag{12}$$

где $\bar{f} \in L^2(\Omega)$; $\gamma = (\gamma_j)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, — оператор следов [1]; $V(\Lambda) = \{u \mid u \in H^m(\Omega), \ \Lambda u \in L^2(\Omega)\}$ — область определения оператора $\Lambda$.

**Теорема.** Пусть $u \in V(\Lambda)$. Тогда существует такая постоянная $C$, что

$$d_h(u) \leqslant C \| \bar{\delta} u - B_h \bar{\delta} u \|_{H_T}, \tag{13}$$

где $B_h$: $g \in H_T \to g_h \in G_h$ — некоторый оператор $G_h$-аппроксимации.

Доказательство. Из соотношения (11) следует, что

$$\bar{a}(u, p_h w_h) = (\bar{\Lambda} u, p_h w_h) + < \bar{\delta} u, \bar{\gamma} p_h w_h > .$$

Домножая уравнение (12) на функцию $p_h w_h$ и интегрируя его по области $\Omega$, получаем $\forall u \in V(\Lambda)$:

$$(\Lambda u, p_h w_h) = (\bar{f}, p_h w_h), \quad (\bar{\Lambda} u, p_h w_h) = (\Lambda u, p_h w_h).$$

Отсюда $R = \bar{a}(u, p_h w_h) - \bar{f}(p_h, w_h) = < \bar{\delta} u, \bar{\gamma} p_h w_h >$ .

С учетом соотношения (4) имеем неравенство

$$|R| \leqslant \| \bar{\delta} u - B_h \bar{\delta} u \|_{H_T} \| \bar{\gamma} p_h w_h \|_{H_T} . \tag{14}$$

В силу непрерывности оператора $\gamma$

$$\| \bar{\gamma} p_h w_h \|_{H_T} \leqslant C \| p_h w_h \|_{\bar{V}} \ \forall p_h w_h \in X_h \subset \bar{V}. \tag{15}$$

Тогда неравенство (13) следует из неравенств (14) и (15).

Таким образом, скорость убывания погрешности приближенного решения, обусловленной нарушением гладкости аппроксимирующих функций при переходе через межэлементную границу, а также приближенным выполнением главных граничных условий задачи, определяется гладкостью точного решения вариационной задачи (7) и аппроксимативными свойствами семейства пространств $G_h$ граничных функций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. – М., 1977. – 384 с. 2. Апанович В.Н. Признак внешних аппроксимаций конечными элементами обобщенных решений краевых задач механики // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1987. – Вып. 14. – С. 47–54. 3. Апанович В.Н. Метод построения конечных элементов для внешних аппроксимаций краевых задач // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 66–72. 4. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М., 1980. – 512 с.