

где

$$Q(x) = \frac{\omega \operatorname{sh} \omega x}{2\pi R(x)} \frac{\int_L X(u) K(u) du}{\operatorname{sh} \omega \operatorname{sh} \omega (u-x)}.$$

Значение c_0 можно найти, применяя формулу

$$\int_{-a}^a \sigma_y(x) dx + p = 0. \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(x) dx + p = 0, \quad (12)$$

где $\sigma_y(x)$ — функция, определенная одним из выражений (11); p — модуль силы давления на штамп, направленной вдоль оси y .

Если ширина полосы h сравнительно большая (но конечная), с небольшой погрешностью можно считать, что $q(x) = 0$. В этом случае $\Phi(z) = i\omega c_0 / X(z)$. Следовательно,

$$\sigma_y = -2\omega c_0 / R(x) \quad \text{на} \quad L',$$

$$\sigma_y = -2\omega c_0 / N(x) \quad \text{на} \quad L_1.$$

При этом c_0 также определяется на основании любого из соотношений (12).

2. *Общие формулы для полосы с разрезом на средней линии.* Пусть область S , занимаемая телом, есть полоса шириной $2h$, ограниченная прямыми $L_1(y = h)$ и $L_2(y = -h)$ и разрезанная на отрезках $L_k^+ = a_k b_k$, $k = 1, \dots, n$, оси Ox . Верхние и нижние края разреза на этих отрезках обозначим L_k^+ и L_k^- . Для нахождения термоупругого состояния тела в области S в зависимости от граничных условий на L_k^+ и L_k^- , L_k^- следует воспользоваться формулами (1)–(3), заменив в них $\Phi(\bar{z})$ на $-\Omega(\bar{z})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. — М., 1966. — 708 с.
2. В о р о в и ч И.И., А л е к с а н д р о в В.М., Б а б е ш к о В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М., 1974. — 456 с.
3. П р у с о в И.А. Некоторые задачи термоупругости. — Мн., 1972. — 200 с.
4. П р у с о в И.А. Двухмерные краевые задачи фильтрации. — Мн., 1987. — 182 с.

УДК 539.3

В.В. КОРОЛЕВИЧ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тонкую сплошную квадратную пластинку, обладающую прямоугольной анизотропией, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из осей симметрии квадрата, расположенной в срединной плоскости.

В общем случае внешний контур L_0 некруговых пластин описывается следующими параметрическими уравнениями [1]:

$$x = R(\cos \vartheta + \epsilon \cos m \vartheta), \quad y = R(\sin \vartheta - \epsilon \sin m \vartheta),$$

где R, m, ϵ — постоянные, характеризующие размеры и форму контура; ϑ — параметр точек контура; $|\epsilon| < 1/m$. При $m = 3, |\epsilon| = 1/9$ пластинка имеет форму квадрата с закругленными углами. Внешнюю границу квадратной пластинки будем полагать свободной от усилий.

Наряду с декартовой системой координат Oxy , оси которой совпадают с главными направлениями упругой анизотропии тела, введем полярную систему координат r, θ .

Радиальная σ_r , тангенциальная σ_θ и касательные $\tau_{r\theta}$ компоненты напряжений, возникающих в пластинке при ее вращении вокруг оси Ox , выражаются через функцию напряжений $F(r, \theta)$ известными соотношениями [2]:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + U(r, \theta), \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + U(r, \theta),$$

$$\tau_{r\theta} = - \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} \left(\frac{F}{r} \right),$$

где $U(r, \theta) = - \frac{\gamma \omega^2 r^2}{4g} (1 - \cos 2\theta)$ — потенциал центробежных сил; γ — удельный вес пластинки; функция $F(r, \theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, приведенному в работе [3].

Решение задачи о распределении напряжений во вращающейся анизотропной квадратной пластинке построим с помощью метода малого параметра (возмущений формы границы). За параметр принимается величина ϵ , характеризующая степень отклонения заданного некругового контура пластинки от соответствующей окружности радиусом R . Ограничиваясь вторым приближением, представим искомые компоненты напряжений и функцию напряжений в виде суммы по степеням малого параметра ϵ :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^2 \epsilon^k \sigma_{ij}^{(k)}, \quad F = \sum_{k=0}^2 \epsilon^k F_k, \quad i, j = 1, 2,$$

где $\sigma_{11} = \sigma_r$; $\sigma_{22} = \sigma_\theta$; $\sigma_{12} = \tau_{r\theta}$.

Функции F_k удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\hat{L} F_0 = (\xi + \kappa - 4\eta) \frac{\gamma \omega^2}{g}, \quad \hat{L} F_k = 0, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где \hat{L} — обозначение дифференциального оператора (см. [3]).

Граничные условия на внешнем некруговом контуре пластинки преобразуются с помощью метода малого параметра к системе условий на круговом контуре [1].

Общее решение для функций напряжений $F_k(r, \theta)$ будем искать в виде конечного отрезка ряда Фурье:

$$F_k(r, \theta) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^{k+2} a_{ln}^{(k)} r^{2l} \cos 2n\theta, \quad (2)$$

где $N = 1$ в нулевом приближении, $N = 3$ в первом и $N = 4$ во втором приближениях; $a_{ln}^{(k)}$ — неизвестные постоянные. Последовательно подставляя разложение (2) в уравнения (1) и требуя выполнения граничных условий, получаем следующие выражения для компонент напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= \frac{\gamma \omega^2 R^2}{16g} \left[\left(\frac{3\xi - \kappa - 4\eta}{\xi} \right) - 4 \cos 2\theta \right] (1 - \rho^2), \\ \sigma_r^{(1)} &= -\frac{\gamma \omega^2 R^2}{4g} \left\{ \rho^4 \cos 6\theta + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\xi + 5\kappa + 20\eta}{\xi} \right) (1 - \rho^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{3\xi - \kappa - 4\eta}{\xi} \right) \right] \rho^2 \cos 4\theta + [\varphi_1 (1 - \rho^4) + 1] \cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [\varphi_0 (2\rho^2 - 1) + \lambda] (1 - \rho^2) \right\}, \\ \sigma_r^{(2)} &= \frac{\gamma \omega^2 R^2}{4g} \left\{ -\left(\frac{3\xi + 7\kappa + 28\eta}{\xi} \right) \rho^6 \cos 8\theta + 2[\varphi_1 (14\rho^2 - 15) - \right. \\ &\quad \left. - (6\rho^2 - 5)] \rho^4 \cos 6\theta + [\psi_2 (2\rho^2 - 3) (1 - \rho^2) + \frac{1}{2} (\varphi_0 + \lambda) (5\rho^2 - 6)] \times \right. \\ &\quad \left. \times \rho^2 \cos 4\theta - [\psi_1 (4\rho^4 - \rho^2 - 1) (1 - \rho^2) + \Omega_1 (\rho^4 - 1) + \right. \\ &\quad \left. + (2\varphi_1 - 5)] \cos 2\theta + \frac{1}{2} [\psi_0 (5\rho^4 - 5\rho^2 + 1) - \Omega_0 (1 + \rho^2) + \right. \\ &\quad \left. + 24 \frac{\eta}{\xi} \Omega_1 + 6 \frac{\xi}{\xi} (\varphi_0 + \lambda) - 24 \frac{\eta}{\xi} (\varphi_1 - 1)] (1 - \rho^2) - \left(\frac{\xi - 11\kappa - 44\eta}{4\xi} \right) \right\}; \\ \sigma_\theta^{(0)} &= \frac{\gamma \omega^2 R^2}{16g} \left\{ \left[\left(\frac{3\xi - \kappa - 4\eta}{\xi} \right) - \left(\frac{\xi - 3\kappa - 12\eta}{\xi} \right) \rho^2 \right] + 4(1 - \rho^2) \cos 2\theta \right\}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{\gamma \omega^2 R^2}{4g} \left\{ \rho^4 \cos 6\theta + \frac{1}{2} \left[3 \left(\frac{\xi + 5\kappa + 20\eta}{\xi} \right) (1 - \rho^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{5\xi + 9\kappa + 36\eta}{\xi} \right) \right] \rho^2 \cos 4\theta + [\varphi_1 (15\rho^4 - 12\rho^2 + 1) - (4\rho^2 - 1)] \cos 2\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} [\varphi_0 (10\rho^4 - 9\rho^2 + 1) + \lambda (3\rho^2 - 1)] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta}^{(2)} = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{4g} \left\{ \left(\frac{3\xi + 7\kappa + 28\eta}{\xi} \right) \rho^6 \cos 8\theta - 2 [\varphi_1 (28\rho^2 - 15) - (12\rho^2 - 5)] \rho^4 \cos 6\theta + [\psi_2 (14\rho^4 - 15\rho^2 + 3) - \frac{3}{2} (\varphi_0 + \lambda) (5\rho^2 - 2)] \rho^2 \cos 4\theta + [\psi_1 (56\rho^6 - 75\rho^4 + 24\rho^2 - 1) - \Omega_1 (15\rho^4 - 12\rho^2 + 1) - 2\varphi_1 (6\rho^2 - 1) + (12\rho^2 - 5)] \cos 2\theta - \frac{1}{2} [\psi_0 (35\rho^6 - 50\rho^4 + 18\rho^2 - 1) - \Omega_0 (5\rho^4 - 1) + 24 \frac{\eta}{\xi} \Omega_1 (3\rho^2 - 1) + 6 \frac{\xi}{\xi} (\varphi_0 + \lambda) (3\rho^2 - 1) - 24 \frac{\eta}{\xi} (\varphi_1 - 1) (3\rho^2 - 1)] - \frac{(\xi - 11\kappa - 44\eta)}{4\xi} \right\};$$

$$\tau_{r\theta}^{(0)} = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{4g} (1 - \rho^2) \sin 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{4g} \left\{ \rho^4 \sin 6\theta + \left[\left(\frac{\xi + 5\kappa + 20\eta}{\xi} \right) (1 - \rho^2) - 2 \left(\frac{\xi + \kappa + 4\eta}{\xi} \right) \right] \rho^2 \sin 4\theta - [\varphi_1 (5\rho^2 - 1) (1 - \rho^2) + (2\rho^2 - 1)] \sin 2\theta \right\},$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} = - \frac{\gamma\omega^2 R^2}{4g} \left\{ - \left(\frac{3\xi + 7\kappa + 28\eta}{\xi} \right) \rho^6 \sin 8\theta + 2 [3\varphi_1 (7\rho^2 - 5) - (9\rho^2 - 5)] \rho^4 \sin 6\theta + [\psi_2 (7\rho^2 - 3) (1 - \rho^2) + (\varphi_0 + \lambda) (5\rho^2 - 3)] \times \right. \\ \left. \times \rho^2 \sin 4\theta + [\psi_1 (14\rho^4 - 11\rho^2 + 1) (1 - \rho^2) - \Omega_1 (5\rho^2 - 1) (1 - \rho^2) + 2\varphi_1 (3\rho^2 - 1) - (6\rho^2 - 5)] \sin 2\theta \right\},$$

где $\rho = r/R$. Явные выражения для постоянных $\lambda, \varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \Omega_0, \Omega_1$ не приводятся вследствие их громоздкости.

Найденное решение (3) точно удовлетворяет уравнениям (1) и приближенно — граничным условиям на контуре L_0 .

Рассмотрим пример расчета напряжений во вращающейся анизотропной квадратной пластинке, имеющей следующие упругие постоянные [4]: $E_x = 3,39 \cdot 10^{10}$ Па, $E_y = 3,36 \cdot 10^{10}$ Па, $G_{xy} = 8,24 \cdot 10^9$ Па, $\nu_{xy} = 0,13$. Ось вращения лежит в срединной плоскости пластинки и совпадает с осью симметрии. При значениях параметров $m = 3, \epsilon = 1/9$ в уравнениях контура пластинка вращается вокруг большей оси симметрии (диагональ квадрата), а при $m = 3, \epsilon = -1/9$ — вокруг меньшей оси симметрии. Значения наибольших напряжений $\sigma_r, \sigma_{\theta}, \tau_{r\theta}$ во втором приближении для пластинки при $\epsilon = 1/9$ приведены на рис. 1, а для пластинки при $\epsilon = -1/9$ — на рис. 2.

Максимальная погрешность δ решения (3) при удовлетворении гранич-

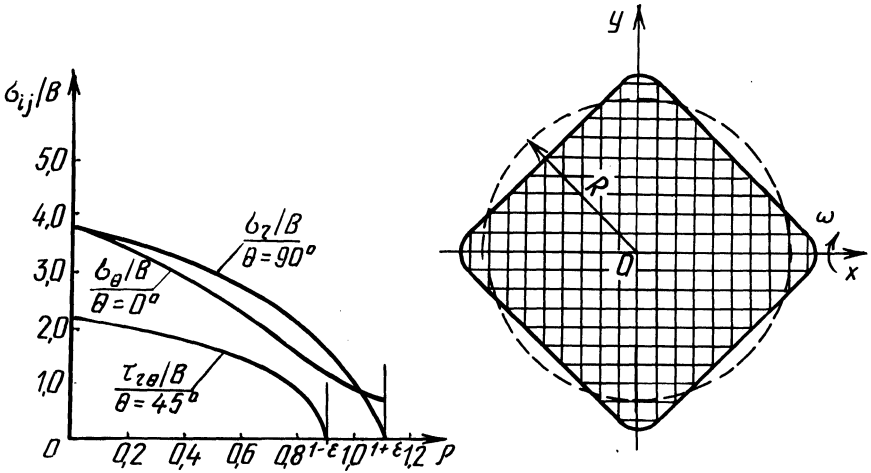


Рис. 1. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в анизотропной квадратной пластинке, вращающейся вокруг большей оси симметрии (диагонали квадрата) при $m=3$, $\epsilon = 1/9$, $B = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{8g}$

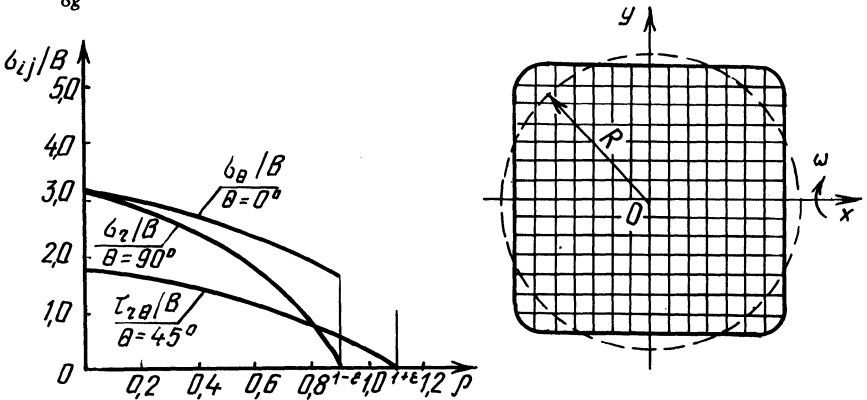


Рис. 2. Эпюры напряжений σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ в анизотропной квадратной пластинке, вращающейся вокруг меньшей оси симметрии при $m=3$, $\epsilon = -1/9$, $B = \frac{\gamma\omega^2 R^2}{8g}$

ным условиям на внешнем контуре квадратной пластинки зависит от положения ее по отношению к оси вращения и составляет: а) $\delta = 2,13\%$ при $m=3$, $\epsilon = 1/9$; б) $\delta = 4,25\%$ при $m=3$, $\epsilon = -1/9$ (за 100% принято значение наибольшего напряжения в пластинке).

Случай изотропной квадратной пластинки рассмотрен в работе [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. У з д а л е в А.И. Температурные напряжения в пластинках, ограниченных двухсвязным контуром. – Саратов, 1975. – 175 с. 2. Л е х н и ц к и й С.Г. Анизотропные плас-

гинки. — М., 1957. — 463 с. 3. К о р о л е в и ч В.В. Напряженное состояние диска с прямоугольной анизотропией, вращающегося вокруг диаметра // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1988. — Вып. 15. — С. 118–122. 4. Ш в е ц о в В.А., А с а ф ь е в а О.Н. Равномерное вращением круглой ортотропной пластинки с круговым отверстием // Механика деформируемых сред. — Горький, 1974. — Вып. 2. — С. 165–174. 5. К р а в ц о в В.Ф. Напряжения в квадратной пластинке, вращающейся вокруг оси симметрии, расположенной в срединной плоскости // Прикл. теория упругости. — Саратов, 1983. — С. 91–97.

УДК 539.3:519.63

В.Н. АПАНОВИЧ

СХОДИМОСТЬ ВНЕШНИХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Метод конечных элементов широко применяется для аппроксимации разрешаемых в пространствах Соболева $H^m(\Omega)$ вариационных уравнений краевых задач механики [1]. В данной статье исследуются внешние аппроксимации решений вариационных задач, построенные с использованием согласованных по подпространству конечных элементов (КЭ), предложенных в работах [2, 3]. Аппроксимирующие функции из соответствующих пространств КЭ разрывны на межэлементных границах разбиения области.

1. При использовании вариационных формулировок краевых задач механики решение последних сводится к нахождению некоторой функции $u \in W$, удовлетворяющей вариационному уравнению

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in W, \quad (1)$$

где W — замкнутое подпространство из $V = H^m(\Omega)$; $f(v)$ — некоторая линейная форма на W ; $a(u, v)$ — непрерывная на $V \times V$ билинейная форма

$$a(u, v) = \sum_{|p|, |q|=0}^m \int_{\Omega} f_{pq}(x) D^p u D^q v dx. \quad (2)$$

Построим внешнюю аппроксимацию уравнения (1). В соответствии с требованиями работы [2] произведем разбиение τ области $\bar{\Omega}$ на КЭ K и определим пространства

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \prod_K H^m(K), \quad \bar{V}_0 = \prod_K H_0^m(K), \\ H &= \prod_K L^2(K) = L^2(\Omega), \quad V_h = R^N(h), \\ \bar{T} &= \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}(\partial K_{r,l}), \\ H_T &= \prod_K \prod_{\partial K_r} \prod_{\partial K_{r,l}} \prod_{j=0}^{m-1} L^2(\partial K_{r,l}), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $K \in \tau$; $\partial K_r \in M(\partial K_r)$; $\partial K_{r,l} \in M(\partial K_{r,l})$; $M(\partial K_r)$ — множество граней ∂K_r КЭ; $M(\partial K_{r,l})$ — множество гладких участков $\partial K_{r,l}$ грани ∂K_r КЭ.