ЛИТЕРАТУРА

1. П р у с о в И.А. Некоторые задачи термоупругости. Мн., 1972. – 198 с. 2. П р у с о в И.А., Б а х м а т Г.Л. Решение некоторых задач термоупругости для плоскости с разрезами в случае неоднозначного температурного потенциала. – М., 1977. – 14 с. Деп. в ВИНИТИ № 338-77. 3. Б а х м а т Г. Л. Термоупругое равновесие анизотропной пластины с трещинами в случае неоднозначного температурного потенциала // Механика разрушения материалов: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. – Львов, 1987. – 312 с. 4. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. – М., 1963. – 639 с. 5. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 707 с. 6. П а н а с ю к В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев, 1968. – 245 с. 7. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.П., Д а ц ы ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев, 1976. – 442 с. 8. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М., 1959. – 327 с.

УДК 539.3

А.И. ПРУСОВ, В.И. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

В данной статье дается представление общих формул термоупругости для изотропной полосы, несколько отличное от известных формул Н.И. Мусхелишвили для полуплоскости и плоскости с разрезом на отрезках прямой [1]. В качестве примера рассматривается задача о давлении штампа на полосу, лежащую на жестком основании. Решение этой задачи другими методами представляет большие математические трудности [2].

1. *Общие формулы для сплошной полосы.* Пусть изотропное тело занимает в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область S^-, ограниченную прямыми L $(y = 0)$ и $L_1 (y = -h)$. Обозначим через S^+ полосу $0 < y < h$.

Предположим, что тело находится в упругом равновесии под действием нагрузки на L и L_1 при стационарной температуре $T = 2\mathrm{Re}\,\Psi_0(z)$, где $\Psi_0(z)$ – комплексный потенциал температурного поля $T(x, y)$. Будем считать, что компоненты напряжений и производная по x компонент перемещений определяются по формулам:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} + \beta\Psi_0(z), \tag{3}$$

где $\Phi(z)$ – кусочно-голоморфная функция, определенная в области $S^- \cup S^+$; $\Psi(z)$ – голоморфная функция, определенная в области S^-; μ, κ, β – известные положительные коэффициенты [1, 3]. В дальнейшем будем предполагать, что напряжения в бесконечных точках области S^- равны нулю, а температура $T = T_\infty = \mathrm{const}$. Кроме того, будем считать, что в некоторых точках на L и

L_1 компоненты напряжений могут иметь особенности интегрируемого порядка и температура $T(x, y)$ ограничена во всех точках области S^-.

Чтобы найти выражение $\Psi_0(z)$ при заданных граничных условиях на L и L_1 для температурного поля $T(x, y)$, воспользуемся формулами [3, 4]:

$$\begin{aligned} &F_0(z) + \epsilon F_0(\bar{z}) = T + i\eta \ , \\ &F(z) + \epsilon F(\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(T + i\eta) \ , \\ &F(z) - \epsilon F(\bar{z}) = -i\frac{\partial}{\partial y}(T + i\eta) \ , \end{aligned} \tag{4}$$

где $\epsilon = \pm 1$; $\eta(x, y)$ – вспомогательная гармоническая функция, гармонически не сопряженная с функцией $T(x, y)$; $F_0(z) = \int F(z)dz$; $F(z)$ – голоморфная функция, определенная в областях S^- и S^+. При этом, как легко видеть, связь между $F_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ определяется соотношением $\Psi_0(z) = [F_0(z) + \epsilon \bar{F}_0(z)]/2$.

Используя формулы (1)–(4), можно найти решение многих граничных задач термоупругости для рассматриваемой области. При $\Psi_0(z) = \Psi(z) = 0$ (1)–(3) представляют собой известные формулы Мусхелишвили для полуплоскости [1].

Рассмотрим в качестве примера изотермическую задачу о давлении штампа на полосу, лежащую на жестком основании, при условиях:

$$\begin{aligned} &\tau_{xy} = 0 \text{ на } L + L_1 \ , \ v = -\delta \text{ на } L' \ , \\ &\sigma_y = 0 \text{ на } L'' , \ v = 0 \text{ на } L_1 \ , \end{aligned} \tag{5}$$

где L' ($|x| < a$) – промежуток на верхнем контуре полосы L, определяющий область контакта штампа с полосой; L'' – остальная часть L; $\delta = \text{const}$ – осадка штампа.

На основании формул (2), (3) при $\Psi_0(z) = 0$ и условий (5) получаем граничные условия для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi^-(x) - \Phi^+(x) + \overline{\Psi^-(x)} = 0 \text{ на } L'' , \\ &\mathrm{Im}[\Phi^-(x) - \Phi^+(x) + \overline{\Psi^-(x)}] = 0 \text{ на } L' , \\ &\mathrm{Im}[\kappa\Phi^-(x) + \Phi^+(x) - \overline{\Psi^-(x)}] = 0 \text{ на } L' ; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Im}[\Phi(t) - \Phi(\bar{t}) - 2ih\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)}] = 0 \text{ на } L_1 \ , \\ &\mathrm{Im}[\kappa\Phi(t) + \Phi(\bar{t}) + 2ih\overline{\Phi'(t)} - \overline{\Psi(t)}] = 0 \text{ на } L_1 \ , \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $t = x - ih$; $\bar{t} = x + ih$; $\Phi^-(x)$, $\Phi^+(x)$ и $\Psi^-(x)$ – предельные значения функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ на L со стороны областей S^- и S^+.

Из равенств (6) и (7) следует, что $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ должны принимать вещественные значения на L'. Кроме того, функция $\Phi(t)$ должна принимать вещественные значения на контуре L_1. Учитывая это, полагаем:

$$\Psi(z) = \frac{\omega c_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)d\tau}{\mathrm{cth}\,\omega(\tau - z)},$$
$$\Phi(z) = c_0[F(z) + i\omega] \qquad (8)$$

где

$$F(z) = \frac{\omega\,\mathrm{sh}\,\omega z}{2\pi i X(z) c_0} \int_{L''} \frac{X(u)\overline{\Psi}(u)du}{\mathrm{sh}\,\omega u\,\mathrm{sh}\,\omega(u - z)} =$$
$$= \frac{\omega\,\mathrm{sh}\,\omega z}{2\pi i X(z)} \int_{L''} \frac{\omega X(u)du}{\pi\,\mathrm{sh}\,\omega u\,\mathrm{sh}\,\omega(u - z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)d\tau}{\mathrm{cth}\,\omega(\tau - u)}; \qquad (9)$$

$X(z) = \sqrt{\mathrm{sh}^2\omega z - \mathrm{sh}^2\omega a}$; $\omega = \pi/2h$; c_0 – произвольная вещественная постоянная; $q(\tau)$ – произвольная вещественная функция, удовлетворяющая условию Гельдера.

Функции (8) удовлетворяют условиям (6) при любом $q(\tau)$. В этом нетрудно убедиться, если учесть соотношения:

$$F^-(x) - F^+(x) = -\overline{\Psi^-(x)} \text{ на } L'',$$
$$X^-(x) = -X^+(x) = -iR(x) \text{ на } L',$$
$$X^-(x) = X^+(x) = \epsilon R(x) \text{ на } L'',$$

где $R(x) = \sqrt{|\mathrm{sh}^2\omega x - \mathrm{sh}^2\omega a|}$; $\epsilon = 1$ для $x > a$, $\epsilon = -1$ для $x < -a$.

Так как

$$F(t) = -F(\bar{t}) = -F_1(x), \quad \Psi(t) = c_0[J_1(x) + iq(x)],$$

где

$$F_1(x) = \frac{\omega\,\mathrm{ch}\,\omega x}{2\pi N(x)} \int_{L''} \frac{X(u)K(u)du}{\mathrm{sh}\,\omega u\,\mathrm{ch}\,\omega(u - x)}, \quad N(x) = \sqrt{\mathrm{ch}^2\omega x + \mathrm{sh}^2\omega a},$$
$$K(u) = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)d\tau}{\mathrm{cth}\,\omega(\tau - u)}; \quad J_1(x) = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(\tau)d\tau}{\mathrm{th}\,\omega(\tau - x)},$$

то для выполнения условий (7) необходимо, чтобы функция $q(x)$ удовлетворяла интегральному уравнению

$$q(x) - \frac{\omega}{\pi}\frac{dF_1}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{N(x)}\right). \qquad (10)$$

Зная $q(x)$, контактные напряжения на L' и L_1 найдем по формулам:

$$\sigma_y = c_0[K(x) + 2Q(x) - 2\omega/R(x)] \text{ на } L',$$
$$\sigma_y = c_0[J_1(x) - 2F_1(x) - 2\omega/N(x)] \text{ на } L_1, \qquad (11)$$

где

$$Q(x) = \frac{\omega \operatorname{sh} \omega x}{2\pi R(x)} \int_{L''} \frac{X(u) K(u) du}{\operatorname{sh} \omega u \operatorname{sh} \omega (u-x)} .$$

Значение c_0 можно найти, применяя формулу

$$\int_{-a}^{a} \sigma_y(x) dx + p = 0 \quad \text{или} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y(x) dx + p = 0 , \tag{12}$$

где $\sigma_y(x)$ – функция, определенная одним из выражений (11); p – модуль силы давления на штамп, направленной вдоль оси y.

Если ширина полосы h сравнительно большая (но конечная), с небольшой погрешностью можно считать, что $q(x) = 0$. В этом случае $\Phi(z) = i\omega c_0 / X(z)$. Следовательно,

$$\sigma_y = -2\omega c_0 / R(x) \text{ на } L' ,$$

$$\sigma_y = -2\omega c_0 / N(x) \text{ на } L_1 .$$

При этом c_0 также определяется на основании любого из соотношений (12).

2. *Общие формулы для полосы с разрезом на средней линии.* Пусть область S, занимаемая телом, есть полоса шириной $2h$, ограниченная прямыми $L_1 (y = h)$ и $L_2 (y = -h)$ и разрезанная на отрезках $L'_k = a_k b_k$, $k = 1, ..., h$, оси Ox. Верхние и нижние края разреза на этих отрезках обозначим L_k^+ и L_k^-. Для нахождения термоупругого состояния тела в области S в зависимости от граничных условий на L_k и L_k^+, L_k^- следует воспользоваться формулами (1)–(3), заменив в них $\Phi(\bar{z})$ на $-\Omega(\bar{z})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 708 с. 2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М., 1974. – 456 с. 3. Прусов И.А. Некоторые задачи термоупругости. – Мн., 1972. – 200 с. 4, Прусов И.А. Двухмерные краевые задачи фильтрации. – Мн., 1987. – 182 с.

УДК 539.3

В.В. КОРОЛЕВИЧ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ КВАДРАТНОЙ ПЛАСТИНКИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим тонкую сплошную квадратную пластинку, обладающую прямоугольной анизотропией, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг одной из осей симметрии квадрата, расположенной в срединной плоскости.