УДК 539.3

Г.Л. БАХМАТ

ТЕРМОУПРУГОЕ И ПРЕДЕЛЬНО-РАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ ИЗОТРОПНОЙ ПЛОСКОСТИ С ДВУМЯ СИММЕТРИЧНЫМИ РАЗРЕЗАМИ, НА КРАЯХ КАЖДОГО ИЗ КОТОРЫХ ПОДДЕРЖИВАЕТСЯ ПОСТОЯННАЯ ТЕМПЕРАТУРА

Пусть изотропное упругое тело занимает бесконечную плоскость с двумя симметричными разрезами $L_1 =]-b, -a[$ и $L_2 =]a, b[$ на вещественной оси, температурный режим на берегах которых поддерживается по закону

$$T = T_0 \text{ на } L_1^{\pm}, \; T = -T_0 \text{ на } L_2^{\pm} \; . \tag{1}$$

Заметим, что случай, когда на берегах разрезов задается постоянная, но не равная по абсолютной величине температура, т. е. когда $T = T_1$ на $L_1^{\pm}$, $T = T_2$ на $L_2^{\pm}$, подстановкой $T_1 = T_* + T_0$, $T_2 = T_* - T_0$ сводится к случаю (1).

Определим термоупругое состояние в каждой точке рассматриваемой области D в предположении, что напряженное состояние на бесконечности отсутствует, края разрезов свободны от внешних напряжений и не приходят в контакт в процессе деформации.

Вначале, используя специальное представление гармонической функции [1], после решения соответствующей задачи сопряжения определяем выражение для комплексного потенциала $\Psi_0(z)$ температурного поля:

$$\Psi_0(z) = -k_0 R(z), \tag{2}$$

где $k_0 = -\dfrac{b}{2F(k)} T_0$; $F(k)$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем $k = a/b$;

$$R(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}} \, . \tag{3}$$

По виду формул (2), (3) можно заключить, что функция $\Psi_0(z)$ неоднозначна в области D. Используя специальное представление потенциалов Колосова–Мусхелишвили, данное в работах [2,3], составляем краевую задачу Римана–Гильберта для пока неизвестных голоморфных в области D функций $\Phi_*(z)$ и $\Omega_*(z)$:

$$\begin{gathered}[\Phi_*(t) + \Omega_*(t)]^+ - [\Phi_*(t) + \Omega_*(t)]^- = 0 \, , \\ [\Phi_*(t) - \Omega_*(t)]^+ + [\Phi_*(t) - \Omega_*(t)]^- = 4\epsilon a_0 f(t) \, , \quad t \in L \, ,\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$a_0 = \int_0^a \frac{du}{\sqrt{|u^2 - a^2||u^2 - b^2|}} \; ;$$

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t \in L_2 , \\ -1 & \text{для} \quad t \in L_1 . \end{cases}$$

Решая краевую задачу (4) методами, описанными в работах [4, 5] , и используя представление потенциалов из работ [2, 3] , получаем решение рассматриваемой задачи в следующем виде:

$$\Phi(z) = -\Omega(z) = cz\chi(z) - \frac{\epsilon(a_0)}{\pi i}\chi(z)\Big(\int_{-b}^{-a}\frac{dt}{\chi^+(t)(t-z)} -$$

$$-\int_a^b \frac{dt}{\chi^+(t)(t-z)}\Big) + \epsilon R(z) . \tag{5}$$

Здесь $\chi(z) = 1/\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-b^2)}$, причем выбирается такая ветвь, чтобы $\lim\limits_{|z|\to\infty} z^2\chi(z) = 1$.

Представление потенциалов $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ в найденном виде позволяет удобным образом добиться выполнения условий однозначности смещений при обходе разрезов L_1 и L_2 . Удовлетворяя этим условиям, определяют вещественные коэффициенты ϵ и c :

$$\epsilon = -\frac{\beta b T_0}{2(1+\kappa)F(k)}, \quad c = \frac{2\epsilon a_0}{\pi^2}(I^+ - I^-) , \tag{6}$$

где $\beta = 2a_0E$ для плоской деформации и $\beta = 2a_0E/(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния; a_0 – температурный коэффициент линейного расширения;

$$I^{\pm} = \int_a^b \Big(\chi^+(t)\int_a^b \frac{d\tau}{\chi^+(\tau)(\tau \pm t)}\Big)dt . \tag{7}$$

Из соотношений (5)–(7) на основании общих формул термоупругости в виде, предложенном И.А. Прусовым [1] , можно определить компоненты тензора упругих напряжений в любой точке области D . В частности, на оси $y =$ = 0 вне разрезов они будут следующими:

$$\sigma_y = \sigma_x = \mp\frac{1}{\sqrt{|x^2-a^2||x^2-b^2|}}\Big[cx + \frac{\epsilon a_0}{\pi}\Big(\int_a^b \frac{\sqrt{|t^2-a^2||t^2-b^2|}}{t-x}dt -$$

$$-\int_a^b \frac{\sqrt{|t^2-a^2||t^2-b^2|}}{t+x}dt\Big)\Big] + \frac{\epsilon}{b}F(\varphi, k) , \quad \tau_{xy} = 0 , \tag{8}$$

где $F(\varphi, k)$ – неполный эллиптический интеграл 1-го рода с модулем $k = a/b$; знак "–" следует брать для $|x| < a$, знак "+" – для $|x| > b$. Как и предполагалось, вследствие симметричного расположения трещин разрывающие напряжения $\sigma_y(x, 0)$ вне разрезов представляются нечетной функцией относительно переменной x. Поэтому возможно распространение лишь одной трещины: либо в направлении абсцисс точек a и b (если $T_0 > 0$), либо в направлении абсцисс точек $-b$ и $-a$ (если $T_0 < 0$). Считая для определенности, что $T_0 > 0$, на основании полученного результата (8) и условия предельного равновесия, приведенного в работе [6], укажем аналитические зависимости для определения предельных температур $T^*_{0(a)}$, $T^*_{0(b)}$, по достижении которых возможно распространение трещины в направлении абсцисс ее концов:

$$\eta T^*_{0(a)} = \frac{\sqrt{\lambda(\lambda+2)}}{2/\pi(I_2 - I_1) + I^+_{(a)} - I^-_{(a)}},$$
$$\eta T^*_{0(b)} = -\frac{(1+\lambda)\sqrt{\lambda(\lambda+2)}}{2/\pi(I_2 - I_1) + I^+_{(b)} - I^-_{(b)}}, \tag{9}$$

где $\eta = \dfrac{\beta\sqrt{a}}{2\sqrt{2}(1+\kappa)k}$; k – модуль сцепления, определяемый экспериментально при температуре $T = T_0$; $\lambda = (b-a)/a$ – безразмерный параметр;

$$I_1 = \int_1^{1+\lambda} \frac{1}{\sqrt{(v^2-1)[(1+\lambda)^2+v^2}} \times$$
$$\times \left(\int_1^{1+\lambda} \frac{(1+(1+\lambda)^2 - v^2 - u^2)(u+v)}{\sqrt{(u^2-1)(1+\lambda)^2 - u^2]} + \sqrt{(v^2-1)[(1+\lambda)^2 - v^2]}} du\right) dv, \tag{10}$$
$$I_2 = \int_1^{1+\lambda} \frac{1}{\sqrt{(v^2-1)[(1+\lambda)^2 - v^2]}} \left(\int_1^{1+\lambda} \frac{\sqrt{(u^2-1)[(1+\lambda)^2 - u^2]}}{u+v} du\right) dv,$$

$$I^{\pm}_{(a)} = \int_1^{1+\lambda} \frac{\sqrt{(u^2-1)[(1+\lambda)^2 - u^2]}}{u \pm 1} du,$$
$$I^{\pm}_{(b)} = \int_1^{1+\lambda} \frac{\sqrt{(u^2-1)[(1+\lambda)^2 - u^2]}}{u \pm \lambda \pm 1} du. \tag{11}$$

Интегралы (10), (11) при некоторых конкретных значениях λ с точностью до 10^{-5} вычислялись на ЭВМ с использованием методики работ [7, 8]. По результатам вычислений составлены таблицы значений, на основании которых построены диаграммы предельных температур $T^*_{0(a)}$ и $T^*_{0(b)}$ в зависимости от параметра λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р у с о в И.А. Некоторые задачи термоупругости. Мн., 1972. – 198 с. 2. П р у с о в И.А., Б а х м а т Г.Л. Решение некоторых задач термоупругости для плоскости с разрезами в случае неоднозначного температурного потенциала. – М., 1977. – 14 с. Деп. в ВИНИТИ № 338-77. 3. Б а х м а т Г.Л. Термоупругое равновесие анизотропной пластины с трещинами в случае неоднозначного температурного потенциала // Механика разрушения материалов: Тез. докл. 1-й Всесоюз. конф. – Львов, 1987. – 312 с. 4. Г а х о в Ф.Д. Краевые задачи. – М., 1963. – 639 с. 5. М у с х е л и ш в и л и Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966. – 707 с. 6. П а н а с ю к В.В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев, 1968. – 245 с. 7. П а н а с ю к В.В., С а в р у к М.Л., Д а ц ы ш и н А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. – Киев, 1976. – 442 с. 8. К р ы л о в В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М., 1959. – 327 с.

УДК 539.3

А.И. ПРУСОВ, В.И. ПРУСОВ

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОБЩИХ ФОРМУЛ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ ПОЛОСЫ

В данной статье дается представление общих формул термоупругости для изотропной полосы, несколько отличное от известных формул Н.И. Мусхелишвили для полуплоскости и плоскости с разрезом на отрезках прямой [1]. В качестве примера рассматривается задача о давлении штампа на полосу, лежащую на жестком основании. Решение этой задачи другими методами представляет большие математические трудности [2].

1. *Общие формулы для сплошной полосы.* Пусть изотропное тело занимает в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ область S^-, ограниченную прямыми L $(y = 0)$ и L_1 $(y = -h)$. Обозначим через S^+ полосу $0 < y < h$.

Предположим, что тело находится в упругом равновесии под действием нагрузки на L и L_1 при стационарной температуре $T = 2\operatorname{Re}\Psi_0(z)$, где $\Psi_0(z)$ – комплексный потенциал температурного поля $T(x, y)$. Будем считать, что компоненты напряжений и производная по x компонент перемещений определяются по формулам:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} + \beta\Psi_0(z), \tag{3}$$

где $\Phi(z)$ – кусочно-голоморфная функция, определенная в области $S^- \cup S^+$; $\Psi(z)$ – голоморфная функция, определенная в области S^-; μ, κ, β – известные положительные коэффициенты [1, 3]. В дальнейшем будем предполагать, что напряжения в бесконечных точках области S^- равны нулю, а температура $T = T_\infty = \text{const}$. Кроме того, будем считать, что в некоторых точках на L и