

наук. — 1981. — № 5. — С. 43–48. 2. П р у с о в И.А., К о м а р о в Г.В. Основные граничные задачи для трансверсально-изотропного полупространства // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1985. — Вып. 12. — С. 29–34. 3. У и т г е к е р Э.Т., В а т с о н Дж.Н. Курс современного анализа. — М., 1963. — Ч. 2. — 516 с. 4. Г а л и н Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. — М., 1980. — 303 с.

УДК 539.3

А.Е. КРУШЕВСКИЙ

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ УПРУГОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ С ПОСТОЯННОЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТЬЮ ВОКРУГ СВОЕЙ ОСИ

Первая попытка решения данной задачи предпринималась еще в 1889 г. математиком С. Кри (по имени которого она и получила название "задача Кри") [1]. Однако решение было получено при условии равенства нулю лишь главного вектора напряжений σ_z на торцах цилиндра, т. е. когда

$$\int_0^R r \sigma_z dr = 0 \quad (z = \pm h/2).$$

Условия отсутствия касательных τ_{rz} и нормальных σ_r напряжений были выполнены точно. Поиск путей выполнения условия в каждой точке торцов приводит к бесконечной системе алгебраических уравнений [2]. Построение замкнутого решения на основе операторного разложения функции в неортогональный ряд обнаружило очень сильное осциллирование при выполнении крайних условий, что искажает действительный характер распределения напряжений [3].

В настоящей статье получено решение данной задачи при точном выполнении всех крайних условий методом ортогонализации с помощью рядов Фурье–Бесселя.

Используя ряды для перемещений, рассмотренных в работе [4], после некоторых преобразований в результате применения закона Гука, получаем следующие формулы для напряжений:

$$\sigma_r = \frac{2G}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\Delta_3} \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n z}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \right. \right. \\ \left. - \frac{r}{R} I_1 \left(\frac{2\pi n z}{h} \right) + \frac{h}{2\pi n R} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - \right. \\ \left. \left. \frac{h I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{2\pi n r I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \frac{\gamma h^2 I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{4(\gamma - 1) \pi^2 n^2 R r} \right] -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{h^2 \cos \pi n}{\pi^2 n^2 R^2} \sum_{m=1}^{\infty} B^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_m h}{R} - 1 \right) \left[\left(J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) - \frac{R}{(\gamma-1) \lambda_m r} J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \right) \right. \\
& \times \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} + \left. \left(\frac{\lambda_m r}{R} J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) - \frac{J_1 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right)}{r} \right) \left(z \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{R} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{h}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right] \left. \right\} + \sigma_r^* ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & \frac{2G}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\Delta_3} \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[\frac{1}{\pi n} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{R}{h} \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{I_r \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} + \frac{r}{h} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{h \cos \pi n}{\pi^2 n^2 R} \sum_{m=1}^{\infty} B^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_m h}{R} - 1 \right) J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) \left[\operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\lambda_m h}{2R} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{2R} - \frac{2z}{h} \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{R} \right) \right] \right\} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta} = & \frac{G}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\pi^2 n^2 \Delta_3} \left\{ \frac{\cos \frac{2\pi n z}{h}}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} \left[\frac{\gamma h}{2(\gamma-1)r} I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\pi n R}{r} \frac{I_0 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right) I_1 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right)}{I_1 \left(\frac{2\pi n R}{h} \right)} - \frac{\pi n}{\gamma-1} I_0 \left(\frac{2\pi n r}{h} \right) \right] - \right. \\
& \left. - \frac{2h \cos \pi n}{R} \sum_{m=1}^{\infty} B^{-1} \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_m h}{R} - 1 \right) \left[\left(\frac{\gamma_2}{\gamma-1} J_0 \left(\frac{\lambda_m r}{R} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$+ \frac{RJ_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{(\gamma-1)\lambda_m r} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} + \frac{J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)}{r} \left(z \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{R} - \right. \\ \left. - \frac{h}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \Big] + \sigma_r^* + \frac{\gamma \rho \omega^2 r^2}{8(\gamma-1)},$$

и

$$B = \left(\operatorname{sh} \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \right. \\ \left. + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_m h}{2R},$$

$$\tau_{rz} = \frac{2G}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{\Delta_3} \left\{ \frac{\sin \frac{2\pi n z}{h}}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \left[\frac{r}{R} I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{I_0\left(\frac{2\pi n R}{h}\right) I_1\left(\frac{2\pi n r}{h}\right)}{I_1\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} \right] - \frac{h \cos \pi n}{R^2} \times \right. \\ \left. \lambda_m J_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) \left(z \operatorname{ch} \frac{\lambda_m z}{R} - \frac{h}{2} \operatorname{sh} \frac{\lambda_m z}{R} \operatorname{cth} \frac{\lambda_m h}{2R} \right) \right\} \\ \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_m) \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \operatorname{sh} \frac{\lambda_m h}{2R}}{\quad},$$

$$\sigma_r^* = \frac{\rho \omega^2}{48\gamma(\gamma-1)} \left[\gamma_2 (3\gamma-4) (h^2 - 3z^2) + 3\gamma(7\gamma-8) (R^2 - r^2) \right],$$

$$\Delta_3 = \frac{I_0^2\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)}{I_1^2\left(\frac{2\pi n R}{h}\right)} - \frac{\gamma h^2}{4\pi^2 n^2 (\gamma-1) R^2} - 1,$$

$$D_n = F_n + \frac{AF(k)}{1-A}, \quad F(n) = \frac{\alpha \cos \pi n}{n^2},$$

$$\alpha = \frac{\gamma_2 (3\gamma-4) h^3 \rho \omega^2}{8\gamma(\gamma-1) G \pi^2}, \quad \gamma_2 = \gamma - 2, \quad \gamma = \frac{2(1-\gamma)}{1-2\gamma},$$

$$A = \frac{8h \cos \pi n}{R} \times \left(\operatorname{ch} \frac{\lambda_m h}{R} - 1 \right) \cos \pi k$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\operatorname{sh} \frac{\lambda_m h}{R} + \frac{\lambda_m h}{R} \right) \pi^2 k^2 \Delta_3 \lambda_m \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi n R} + \frac{2\pi n R}{\lambda_m h} \right)^2 \left(\frac{\lambda_m h}{2\pi k R} + \frac{2\pi k R}{\lambda_m h} \right)^2}{}$$

Здесь G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, h и R – высота и радиус цилиндра соответственно, $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя, $I_0(x)$, $I_1(x)$ – модифицированные функции Бесселя, ρ – плотность материала, ω – угловая скорость, λ_m – корни уравнения $I_1(\lambda_m) = 0$, A – оператор суммирования.

Полученные формулы для напряжений показывают, что условия равновесия внутри тела с учетом инерционной нагрузки выполняются точно. Краевые условия на поверхности цилиндра выполняются следующим образом: 1) касательные напряжения τ_{rz} равны нулю на торцах и цилиндрической поверхности за счет множителей $\sin \frac{2\pi n z}{h}$ и $I_1\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right)$ для каждого m и n ; 2) нормальные напряжения σ_z на торцах равны нулю за счет сходимости ряда по m для каждого n , т. е. $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_z \Big|_{z=\pm h/2} = 0$; 3) нормальные напряжения σ_r на цилиндрической поверхности равны нулю за счет сходимости ряда по m и n , т. е. $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \sigma_r \Big|_{r=R} = 0$.

Расчет напряжений выполнялся для цилиндра $h = R$, у которого площадь торцов равна площади боковой поверхности. Если при вычислении напряжений в центре цилиндра достаточно вычислить несколько коэффициентов D_n , то на поверхности обнаруживается очень медленная сходимость рядов. Для улучшения сходимости рядов на поверхности цилиндра необходимо использовать формулы суммирования рядов, полученные из условий равновесия на торцах

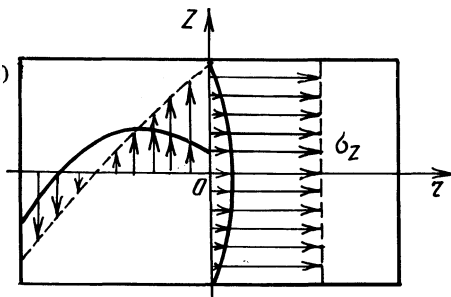
$$\int_0^R \sigma_z r I_0\left(\frac{\lambda_m r}{R}\right) dr = 0$$

и на цилиндрической поверхности

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r \cos \frac{2\pi n z}{h} dz = 0.$$

Сравнение вычисленных напряжений в центре цилиндра и в некоторых точках его поверхности с результатами Кри обнаруживает их сильное расхождение, особенно по напряжениям σ_z . Так, согласно приближенной теории, напря-

Рис. 1. Графики напряжений σ_z (сплошные линии – результаты точного решения, штриховые – результаты приближенного решения)



жения $\sigma_z \Big|_{\substack{r=0 \\ z=0}} = 7,9 \frac{\alpha}{R} G$, а на основании данных формул $\sigma_z = 0,47 \frac{\alpha G}{R}$. Кроме того, характер изменения напряжений σ_z по приближенному решению далек от истинного. Напряжения σ_z вдоль оси цилиндра при приближенном решении постоянны и не равны нулю на торцах. Точное решение показывает, что эти напряжения в центре цилиндра принимают наибольшее значение, а на его торцах обращаются в нуль (рис. 1).

Радиальные и окружные напряжения σ_r и σ_θ по приближенной теории получаются несколько заниженными. Так, согласно приближенному решению,

$$\sigma_r = \sigma_\theta \Big|_{\substack{r=0 \\ z=0}} = \frac{39,5\alpha G}{R}, \quad \sigma_\theta \Big|_{\substack{r=R \\ z=0}} = \frac{15,8\alpha G}{R},$$

согласно точному решению,

$$\sigma_r = \sigma_\theta \Big|_{\substack{r=0 \\ z=0}} = \frac{40,0\alpha G}{R}, \quad \sigma_\theta \Big|_{\substack{r=R \\ z=0}} = \frac{17,7\alpha G}{R}.$$

В заключение отметим несостоятельность принципа Сен-Венана для случая короткого цилиндра, особенно при вычислении осевых напряжений σ_z .

ЛИТЕРАТУРА

1. Р е к а ч В.Г. Руководство к решению задач по теории упругости. – М., 1966. – 227 с.
2. Б а й д а Э.Н. Некоторые пространственные задачи теории упругости. – Л., 1983. – 231 с.
3. К р у ш е в с к и й А.Е., Ч у р а к о в В.М. Примеры решения некоторых задач математической теории упругости в неортогональных рядах // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1975. – Вып. 2. – С. 91–102.
4. К р у ш е в с к и й А.Е. Осесимметричное растяжение (сжатие) упругого конечного цилиндра при заданных на поверхности напряжениях // Теорет. и прикл. механика. – Мн., 1988. – Вып. 15. – С. 59–63.