УДК 539.3

Ю.В. ВАСИЛЕВИЧ, И.А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕНИЯ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ДЛЯ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

В работах [1, 2] дано новое представление общих формул для напряжений и перемещений трехмерного ортотропного тела. Показано, что компоненты напряженно-деформированного состояния выражаются через четыре квазигармонические функции, а коэффициенты упругости a_{ij} удовлетворяют трем независимым алгебраическим уравнениям, которые служат для нахождения модулей сдвига в плоскостях упругой симметрии.

В настоящей статье определена структура общих формул для напряженно-деформированного состояния ортотропного полупространства, на границу которого действует нормальная нагрузка.

Пусть ортотропное тело занимает область $z > 0$, ограниченную плоскостью S $(z = 0)$. Плоскость S перпендикулярна к одному из трех главных направлений упругости тела, параллельных осям Ox, Oy, Oz декартовой системы координат. На некоторую область S_1 границы S действует нормальное давление $p(x, y)$. Касательные напряжения в плоскости S отсутствуют.

Поскольку матрица коэффициентов упругости a_{ij} симметричная, то, учитывая зависимости между постоянными a_{ij} [2], получаем, что кубическое уравнение $M_0 x^3 - M_1 x^2 + M_2 x - M_3 = 0$ [1] имеет вещественные корни, причем один корень – кратный: $x_1 = x_2$. Исходя из общих формул для компонент напряжений и перемещений [1], с учетом кратности корней и соответствующих им параметров, входящих в общие формулы, нетрудно показать, что напряженно-деформированное состояние ортотропного полупространства определяется по следующим формулам:

$$\sigma_x = \frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\left(\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z\partial y^2} + \xi_1\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z^3}\right) + \alpha_3\left(\frac{2\xi_1}{\lambda_1} + \frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} +$$
$$+ 2\alpha_2\left(\xi_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \xi_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_3 + n_1\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial y},$$

$$\sigma_y = \frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\left(\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z\partial x^2} + \eta_1\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z^3}\right) + \alpha_3\left(\frac{2\eta_1}{\lambda_1} + \frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1}\right)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} +$$
$$+ 2\alpha_2\left(\eta_1\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \eta_3\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_3 + n_2\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial y},$$

$$\sigma_z = \frac{\alpha_3 z}{\lambda_1}\left(\xi_1\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z\partial x^2} + \eta_1\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial z\partial y^2}\right) + \frac{\alpha_3\xi_1}{\lambda_1^3}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} +$$
$$+ \xi_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x^2} + \eta_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y^2} + n_3\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial y}, \qquad (1)$$

$$\tau_{xz} = -z\,\frac{\alpha_3\xi_1}{\lambda_1}\,\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial x\partial z^2} - \xi_3\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial z} - n_6\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y\partial z}\;,$$

$$\tau_{yz} = -z\,\frac{\alpha_3\eta_1}{\lambda_1}\,\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial y\partial z^2} - \eta_3\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial y\partial z} + n_7\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x\partial z}\;,$$

$$\tau_{xy} = -\,\frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\,\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial x\partial y\partial z} - 2\alpha_2\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x\partial y} + n_4\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x^2} - n_5\,\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y^2}\,,$$

$$u = \frac{z\alpha_3}{\lambda_1}A_1\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z} + 0{,}5[\,\alpha_3(a_{44}\,\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1} - a_{55}\,\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}) \;+$$

$$+\,4\alpha_2A_1\,]\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + A_3\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial x} - a_{66}\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial y}\;,$$

$$v = \frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\,B_1\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y\partial z} + 0{,}5\,[\,\alpha_3(a_{55}\,\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1} - a_{44}\frac{\partial\eta_1}{\partial\lambda_1}) + 4\alpha_2B_1\,]\,\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} +$$

$$+\;B_3\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial y} + n_8\,a_{66}\,\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}\;, \qquad (2)$$

$$w = 0{,}5\left\{\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\,[\,a_{66} - (1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1}\,\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1})\,(a_{44}\eta_1 + a_{55}\xi_1)\,] + 4\alpha_2C_1\right\}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} +$$

$$+\;\frac{z\alpha_3}{\lambda_1}\,C_1\,\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} + C_3\,\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}\;,$$

где

$$A_k = 0{,}5\,(\eta_k a_{44} - \xi_k a_{55} - a_{66});\;\; B_k = 0{,}5\,(\xi_k a_{55} - \eta_k a_{44} - a_{66});$$

$$C_k = 0{,}5\,(a_{66} - \eta_k a_{44} - \xi_k a_{55});\;\; \xi_k = 0{,}5a_{22}(a_{66}\lambda_k^2 - a_{44})\,\Delta_k^{-1}\;;$$

$$\eta_k = [\,a_{22}(a_{11}\lambda_k^2 - a_{13} - 0{,}5a_{55}) - (a_{12} + 0{,}5a_{66})\,(a_{12}\lambda_k^2 - a_{23})\,]\Delta_k^{-1}\,;$$

$$\Delta_k = a_{22}\,\lambda_k^2(a_{11}\lambda_k^2 - a_{13} - 0{,}5a_{55}) - (a_{12}\lambda_k^2 - a_{23})\,(a_{12}\lambda_k^2 + 0{,}5a_{44});$$

$$\mu_k = +[\,(a_{23} + a_{33}\xi_k)\,(a_{13} + a_{33}\eta_k)^{-1}\,]^{0{,}5},\;\; \alpha_2 = (a_{11} + 2a_{12})\,\times$$

$$\times\;[\,2a_{11}(a_{11} - a_{12})\,]^{-1}\;;$$

$$a_3 = -2\xi_1 a_2(\xi_1/\lambda_1 + \partial\xi_1/\partial\lambda_1)^{-1};$$

$\lambda_k^2 = x_k$ – корни кубического уравнения; $\Phi_k(x, \mu_k y, \lambda_k z)$, $\Phi_0(x, \mu_0 y, \lambda_0 z)$– произвольные квазигармонические функции переменных x, y, z ; значения $n_1, \dots, n_8$ и μ_0^2, λ_0^2 приведены в работе [1]; $k = 1, 3$; остальные обозначения общеприняты [3].

Для изотропного тела напряженно-деформированное состояние выражается по формулам (1), (2) через одну гармоническую функцию $\Phi_1(x, y, z)$ ($\Phi_3 = \Phi_0 = 0$). Устремляя в этом случае коэффициенты a_{ij} к соответствующим значениям для изотропного тела и вводя обозначение $\partial\Phi_1/\partial z = \varphi$, получаем, что выражения (1), (2) преобразуются в известные формулы Л.А. Галина [4, с. 163] для изотропного полупространства.

Исследование кубического уравнения для различных произвольно заданных значений постоянных упругости a_{ij} с учетом [2] показало, что кратный корень $x_1 = x_2 = a_{44}/a_{66}$. Воспользовавшись формулой Виета, найдем значение третьего корня по формуле

$$x_3 = M_1/M_0 - 2a_{44}/a_{66}$$

или

$$x_3 = 0{,}5(M_2 a_{66}/M_0 a_{44} - x_1)$$

или

$$x_3 = a_{66}(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)/a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2).$$

При $x_1 = a_{44}/a_{66}$ значения числителей и знаменателей выражений ξ_1, η_1, $\partial\xi_1/\partial\lambda_1$, $\partial\eta_1/\partial\lambda_1$ стремятся к нулю. Выпишем их предельные значения:

$$\xi_1 = 0{,}5a_{22}a_{66}/\Delta_*, \quad \eta_1 = 0{,}5a_{66}\sqrt{a_{11}a_{22}}/\Delta_*,$$

$$\partial\xi_1/\partial\lambda_1 = -a_{22}a_{66}\sqrt{a_{44}a_{66}}\,(\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{12})/2\Delta_*^2,$$

$$\partial\eta_1/\partial\lambda_1 = \sqrt{a_{11}/a_{22}}\,\partial\xi_1/\partial\lambda_1, \quad \Delta_* = a_{22}(2a_{11}x_1 - a_{13} - 0{,}5a_{55}) -$$

$$- a_{12}(2a_{12}x_1 + 0{,}5a_{44} - a_{23}).$$

При действии на границу ортотропного полупространства нормальной нагрузки напряженно-деформированное состояние определяется через одну квазигармоническую функцию $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$ ($\Phi_3 = \Phi_0 = 0$).

Рассмотрим решение первой основной задачи для ортотропного полупространства, считая, что $\sigma_z = -p(x, y)$, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ в области S_1, $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ вне области S_1. При $z = 0$ из формул (1) имеем

$$p(x, y) = -\frac{a_3\xi_1}{\lambda_1}\,\frac{\partial\varphi(x, y_1)}{\partial z_1},$$

где $\varphi(x, y_1, z_1) = \partial\Phi_1(x, y_1, z_1)/\partial z_1$; $y = \mu_1 y$; $z_1 = \lambda_1 z$.

Для определения функции φ имеем следующий случай задачи Неймана:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_1}{\alpha_3\xi_1}\, p(x,y) & \text{в области } S_1\,, \\ 0 & \text{вне области } S_1\,. \end{cases} \qquad (3)$$

Из теории потенциала известно, что решение задачи (3) может быть представлено в виде потенциала простого слоя

$$\varphi(x, y_1, z_1) = \frac{\lambda_1}{2\pi\xi_1\alpha_3} \int\int_{S_1} \frac{p(\zeta_1,\zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y_1-\zeta_2)^2 + z_1^2}}\,.$$

Учитывая связь между w и φ, выражение для перемещения w, имеющего место на границе полупространства, запишем в виде

$$w = \frac{\lambda_1}{4\pi\alpha_3\xi_1}\left\{\frac{\alpha_3}{\lambda_1}\left[a_{66} - \left(1 + \frac{\lambda_1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda_1}\right)(a_{44}\eta_1 + a_{55}\xi_1)\right] + \right.$$
$$\left. + 2\alpha_2(a_{66} - a_{44}\eta_1 - a_{55}\xi_1)\right\}\int\int_{S_1}\frac{p(\zeta_1,\zeta_2)\, d\zeta_1\, d\zeta_2}{\sqrt{(x-\zeta_1)^2 + (y_1-\zeta_2)^2}}\,. \qquad (4)$$

Таким образом, если определена функция $\Phi_1(x, \mu_1 y, \lambda_1 z)$, компоненты тензора напряжений и перемещений в любой точке ортотропного полупространства определяются по формулам (1), (2).

Выражение (4) является также интегральным уравнением для определения контактных усилий между штампом и ортотропным полупространством при отсутствии сил трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. П р у с о в И.А., В а с и л е в и ч Ю.В. Об одном варианте представления общих формул теории упругости ортотропного тела // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физ., мат. и мех. – 1981. – № 3. – С. 39–45. 2. П р у с о в И.А., В а с и л е в и ч Ю.В. Зависимость модулей сдвига трехмерного ортотропного тела от модулей Юнга и коэффициентов Пуассона // Механика неоднородных структур: Тез. докл. 2-й Всесоюз. конф. – Львов, 1987. – Т. 2. – С. 240–241. 3. Л е х н и ц к и й С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М., 1977. – 416 с. 4. Г а л и н Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М., 1953. – 264 с.

УДК 539.3

Г.В. КОМАРОВ, Л.М. ДВОСКИН, Д.Н. АМЕЛИШКО

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В данной работе предлагается решение контактной задачи для трансверсально-изотропного полупространства. Оно основано на разложении определя-