

ОБЩАЯ И СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

УДК 531.31:62-752

А.Ф. ОПЕЙКО, И.А. МОЛОЧКО

ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ МНОГООПОРНОЙ ПЛАТФОРМЫ

В технике применяются различные конструкции стабилизированных платформ, на которых могут располагаться приборы, аппаратура или технологическое оборудование. Для стабилизации платформы необходимо уменьшить вертикальные и угловые перемещения ее плоскости до некоторого заданного уровня. Эта задача решается с помощью пассивных средств: специальных опор с упругими и диссипативными элементами, а также управляемых опор [1]. Применение управляемых опор позволяет достичь высокой точности стабилизации и требуемого качества переходных процессов в широком диапазоне изменения массы платформы, внешних силовых и кинематических воздействий. Эффективность системы стабилизации во многом определяется используемым алгоритмом управления.

Для того чтобы найти алгоритм управления, обеспечивающий стабилизацию многоопорной платформы, воспользуемся методами решения обратных задач динамики, приведенными в работах [2, 3], а также результатами работы [4].

Допустим, что платформа имеет n управляемых опор и может перемещаться вдоль вертикальной оси, а также поворачиваться в двух взаимно перпендикулярных вертикальных плоскостях. Считая платформу твердым телом, поместим в ее центре инерции начало подвижной системы координат $Ox_3y_3z_3$, оси которой направим вдоль главных осей инерции. Направим ось $O\xi$ инерциальной системы координат $O\xi\eta\zeta$ перпендикулярно неподвижному основанию платформы. Тогда ее положение в инерциальной системе координат можно определить с помощью проекций q_1, q_2 вектора конечного поворота и аппликаты q_3 центра инерции, причем в стабилизированном положении платформы $q_i = 0, i = 1, 2, 3$. Радиусы-векторы точек крепления управляемых опор к платформе в подвижной системе координат обозначим через $r_k = (x_k, y_k, z_k)^T$, а реакции опор, действующие в направлении оси Oz , — Z_k . Проекции главного момента отклоняющих сил на оси Ox и Oy обозначим через Q'_1 и Q'_2 , проекции главного момента реакций Z_k на эти же оси — через Q_1 и Q_2 , проекцию главного вектора отклоняющих сил на ось Oz — через Q'_3 , а проекцию главного вектора реакций Z_k на эту ось — через Q_3 . Уравнения, описывающие малые колебания управляемой платформы, имеют вид:

$$\ddot{q}_i = (Q_i + Q'_i) / \alpha_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

$$Q_1 = \sum_{k=1}^n Z_k y_k, \quad Q_2 = - \sum_{k=1}^n Z_k x_k, \quad Q_3 = \sum_{k=1}^n Z_k, \quad (2)$$

где a_1, a_2 — моменты инерции платформы относительно осей Ox, Oy соответственно; a_3 — масса платформы.

Считаем, что обобщенные координаты и ускорения ограничены по абсолютной величине, т. е.

$$|q_i| \leq q_i^*, \quad |\dot{q}_i| \leq \dot{q}_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

где q_i^*, \dot{q}_i^* — положительные величины, определяемые техническими требованиями. В дальнейшем будем полагать, что $q_i \ll 1, i = 1, 2$.

Необходимо определить закон изменения управляющих сил так, чтобы состояние равновесия платформы, задаваемое условиями $q_i = 0, \dot{q}_i = 0, i = 1, 2, 3$, было бы асимптотически устойчивым, а абсолютные величины управляющих сил принимали бы при этом наименьшие возможные значения.

Интегральное многообразие в пространстве состояний платформы может быть задано линейными уравнениями

$$\Omega_0: \omega_i^0(q, \dot{q}) \equiv \theta_i \dot{q}_i + q_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где $\theta_i = \sqrt{q_i^*/\dot{q}_i^*}$ — постоянные, определяющие время переходных процессов.

Условия осуществимости движения платформы, удовлетворяющего свойствам (4), имеют вид

$$\dot{\omega}_i^0 = \theta_i \ddot{q}_i + \dot{q}_i = \Phi_i^0(\omega_0, q, \dot{q}, t), \quad i = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где Φ_i^0 — функции Еругина, обращающиеся в нуль на многообразии (4) и произвольные при $\omega_0^0 \neq 0$.

Чтобы определить функции Еругина, используем результаты, полученные Р.Г. Мухарлямовым [3]. Введем функционал

$$I_0 = \int_0^\infty (\omega_0^T B_0 \omega_0 + \frac{1}{2} \Phi_0^T A_0 \Phi_0) dt, \quad (6)$$

где $A_0(q, \dot{q}), B_0(q, \dot{q})$ — симметричные положительно-определенные матрицы; $\omega_0 = (\omega_1^0 \ \omega_2^0 \ \omega_3^0)^T, \Phi_0 = (\Phi_1^0 \ \Phi_2^0 \ \Phi_3^0)^T$ — вектор-функции. Тогда, как показано в работе [3], вектор-функция

$$\Phi_0 = -\sqrt{2} A_0^{-1} R_0 \omega_0 \quad (7)$$

делает интегральное многообразие (4) асимптотически устойчивым, переходные процессы в его окрестности оптимальными в смысле минимума функционала (6), а функция Ляпунова $V_0 = \frac{1}{2} \omega_0^T R_0 \omega_0$, где R_0 — постоянная симметричная положительно-определенная матрица.

Матрицы, входящие в функционал (6), будем считать постоянными и диагональными: $A_0 = \sqrt{2} \text{diag} (T_1^0, T_2^0, T_3^0)$, $B_0 = R_0 A_0^{-1} R_0$, а матрицу R_0 — единичной. Параметры T_i^0 , $i = 1, 2, 3$, определяют время протекания переходных процессов в окрестности многообразия (4) и выбираются с учетом ограничений (3). При сделанных предположениях функции Еругина имеют вид $\Phi_i^0 = -\alpha_i \omega_i^0$, $i = 1, 2, 3$, где $\alpha_i = 1/T_i^0$. Подставив в условия (5) выражения функций Еругина и величины ускорений из уравнений (1), найдем обобщенные силы

$$Q_i = -Q_i' - \alpha_i(\dot{q}_i + \alpha_i(\theta_i \dot{q}_i + q_i))/\theta_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

под действием которых движение платформы будет происходить в соответствии с заданными требованиями.

Опорные реакции Z_k , удовлетворяющие уравнениям (2) и (8), определим из условия минимума принуждения [4]

$$Z_w = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Z_k^2.$$

Оптимальные значения опорных реакций, которые назовем *программными*, задаются выражениями

$$P_k = -\lambda_1 y_k - \lambda_2 x_k - \lambda_3. \quad (9)$$

Отметим, что в случае симметричного расположения опор $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n y_k = 0$, а неопределенные множители Лагранжа

$$\lambda_1 = -Q_1 / \sum_{k=1}^n y_k^2, \quad \lambda_2 = Q_2 / \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \lambda_3 = Q_3 / n. \quad (10)$$

Применим полученные результаты для синтеза оптимальной системы стабилизации четырехопорной платформы. Рассмотрим платформу, опоры которой расположены симметрично в вершинах прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Опоры представляют собой гидравлические цилиндры, соединенные с платформой, а их штоки передают усилия на фундамент через упругие элементы. Гидравлические цилиндры являются исполнительными механизмами электрогидравлического следящего привода, динамика которого описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} T_{\text{гц}} \dot{\dot{z}}_k &= x_k, \\ T_{\text{эгу}} \dot{\dot{x}}_k &= K_{\text{эгу}} (u_k - K_{\text{ос}} z_k) - x_k, \quad k = 1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (11)$$

где $T_{\text{гц}}$ — постоянная времени гидроцилиндра; z_k — перемещения штоков гидроцилиндров; x_k — перемещения золотников электрогидравлических усилителей; $T_{\text{эгу}}$ — постоянная времени электрогидравлических усилителей; $K_{\text{эгу}}$ — коэффициент усиления электрогидравлического усилителя; u_k —

управляющие сигналы на входах усилителей; K_{oc} — коэффициент обратной связи по перемещению.

Определим управляющие сигналы так, чтобы фактические значения реакций опор совпадали с их программными значениями. Для этого выразим фактические значения реакций опор через обобщенные координаты:

$$Z_k = -c(\Delta_k - z_k), \quad \Delta_k = q_1 y_k - q_2 x_k + q_3,$$

где c — жесткость упругих элементов опор. Равенство фактических и программных значений реакций опор

$$\Omega_1: \omega_k^1(q, \dot{q}, z) \equiv P_k + c(\Delta_k - z_k) = 0, \quad k = 1, \dots, 4 \quad (12)$$

можно рассматривать как интегральное многообразие [4].

Условия осуществимости движения систем (1), (11) со свойствами (12) имеют вид

$$\dot{\omega}_k^1 = \Phi_k^1(\omega_1, t), \quad (13)$$

где $\omega_1 = (\omega_1^1 \dots \omega_4^1)^T$; $\Phi_1 = (\Phi_1^1 \dots \Phi_4^1)^T$ — вектор-функции Еругина, определяемые из условий минимума функционала

$$I_1 = \int_0^\infty (\omega_1^T B_1 \omega_1 + \frac{1}{2} \Phi_1^T A_1 \Phi_1) dt,$$

где $A_1 = \sqrt{2} \text{diag}(T_1^1, \dots, T_4^1)$; $B_1 = A_1^{-1}$; $T_k^1, k = 1, \dots, 4$, — постоянные времени.

Записывая условия (13) с учетом формул (8), (10) и (12), при $Q_i' = 0, i = 1, 2, 3$, получаем

$$\dot{P}_k + c(\dot{\Delta}_k - \dot{z}_k) = -(P_k + c(\Delta_k - z_k))/T_k^1, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Подставив в последнее выражение \dot{z}_k из уравнения (11), с учетом того, что $T_k^1 \ll 1, a \gg 1$, найдем выражения программных перемещений золотников для каждого из каналов управления:

$$x_k^n = T_{\text{гп}} (\dot{\Delta}_k + (P_k/c + \Delta_k - z_k)/T_k^1), \quad k = 1, \dots, 4.$$

Записав условия равенства программных и фактических перемещений золотников, получим интегральное многообразие системы регулирования в виде

$$\Omega_2: \omega_k^2(q, \dot{q}, z, x) \equiv T_{\text{гп}} (\dot{\Delta}_k + (P_k/c + \Delta_k - z_k)/T_k^1) - x_k = 0,$$

$$k = 1, \dots, 4. \quad (14)$$

Для определения функций Еругина, входящих в условие осуществимости движения

$$\dot{\omega}_2 = \Phi_2(\omega_2, x, t), \quad (15)$$

введем функционал

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\omega_2^T B_2 \omega_2 + \frac{1}{2} \Phi_2^T A_2 \Phi_2) dt ,$$

где $A_2 = \sqrt{2} \text{diag}(T_1^2, \dots, T_4^2)$; $B_2 = A_2^{-1}$; $\omega_2 = (\omega_1^2 \dots \omega_4^2)^T$; $\Phi_2 = (\Phi_1^2 \dots \Phi_4^2)^T$; T_k^2 – постоянные времени. Тогда

$$\Phi_k^2 = -\omega_k^2 / T_k^2 , \quad k = 1, \dots, 4.$$

Преобразуя условия (15) с учетом формул (11) и (14), находим управляющие сигналы для каждого канала управления:

$$u_k = K_{\text{ос}} z_k + (T_{\text{эгу}} \dot{x}_k^{\text{п}} + x_k^{\text{п}}) / K_{\text{эгу}} .$$

Полученные выражения полностью определяют алгоритм стабилизирующего управления. Особенность этого алгоритма заключается в том, что он обеспечивает устойчивость и оптимальность движения не только самой платформы, но также устойчивость и оптимальность процессов управления и регулирования по отношению к свойствам (12) и (14).

Моделирование движения управляемой платформы с использованием полученного алгоритма управления было проведено при следующих значениях параметров: $a = 1,5$ м; $b = 1$ м; $a_1 = 2,727 \cdot 10^4$ кг·м²; $a_2 = 6,06 \cdot 10^4$ кг·м²; $a_3 = 2 \cdot 10^4$ кг; $c = 5 \cdot 10^4$ Н/м; $T_{\text{гп}} = 0,0016$ с; $T_{\text{эгу}} = 0,01$ с; $K_{\text{ос}} = 0,2$ В/м; $K_{\text{эгу}} = 0,5$ м/В; $q_1^* = q_2^* = 0,2$; $q_3^* = 0,1$ м; $\ddot{q}_1^* = \ddot{q}_2^* = 3 \text{ с}^{-2}$; $\ddot{q}_3^* = 3 \text{ м/с}^2$; $T_k^0 = 0,2$ с; $T_k^1 = 0,02$ с; $T_k^2 = 0,002$ с. Для уравнений (1) и (11) были выбраны следующие начальные условия: $q_1^0 = q_2^0 = 0,1$ рад; $q_3^0 = 0,1$ м; $z_k = 0$; $x_k = 0$, $k = 1, \dots, 4$.

На рис. 1, а показаны переходные процессы стабилизации платформы по угловым и вертикальным перемещениям, а на рис. 1, б – переходные процес-

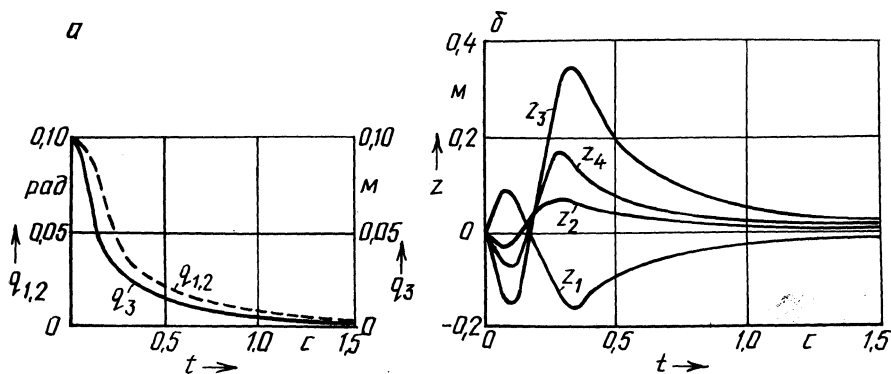


Рис. 1. Переходные процессы стабилизации платформы:

а – изменение обобщенных координат платформы; б – перемещение штоков гидrocиллиндров

сы в системе управления. Перемещения штоков гидроцилиндров управляемых опор быстро выходят на программные значения и сохраняют их, обеспечивая точность обработки основных процессов стабилизации платформы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф у р у н ж и е в Р.И., О с т а н и н А.Н. Управление колебаниями многоопорных машин. — М., 1984. — 208 с.
2. Г а л и у л л и н А.С. Методы решения обратных задач динамики. — М., 1986. — 224 с.
3. М у х а р л я м о в Р.Г. О построении дифференциальных уравнений оптимального движения к заданному многообразию // Диф. уравнения. — 1971. — Т. VII, № 10. — С. 1825–1834.
4. О п е й к о А.Ф. Управление движением твердого тела // Теорет. и прикл. механика. — Мн., 1988. — Вып. 15. — С. 3–8.

УДК 531.3

М.А. ЛЕВИН

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕАКЦИЙ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА КАТЯЩЕГОСЯ ДЕФОРМИРУЕМОГО КОЛЕСА

Опыт показывает, что с увеличением скорости движения колеса изменяются его радиус, нормальная, боковая и угловая жесткости, коэффициент сопротивления уводу, длина области контакта, частотные и другие характеристики. Известно, что если не учитывать массу периферии колеса, то его безразмерные частотные характеристики реакции зависят не от скорости движения колеса, а от отношения частоты возмущения к этой скорости (т.е. от кинематической или путевой частоты). Если же зафиксировать частоту возмущения и изменить скорость, то получится тривиальная зависимость рассматриваемых характеристик от скорости, не являющаяся предметом рассмотрения этой работы. Ниже речь пойдет о более сложном явлении, связанном с учетом массы периферии колеса, что при описании частотных характеристик требует уже не одного аргумента — кинематической частоты, а обязательно двух, причем вторым является скорость, особенно сильно влияющая на результаты, когда ее значение велико.

В данной работе показано, каким образом можно аналитически описать характеристики колеса с шиной в зависимости от скорости v его движения или угловой скорости вращения ω . При этом используется довольно простая модель колеса в виде набора радиальных элементов, имитирующих каркас шины, и окружной нити, имитирующей брекер (рис. 1). Радиальные элементы имеют жесткости c_2 и c_3 в боковой и радиальном направлениях соответственно, а нить характеризуется жесткостью на растяжение N_1 , жесткостью на сдвиг C_g и предварительным натяжением N_{20} , которое, так же как и свободный радиус шины R_0 , устанавливается для невращающейся свободной шины ($v = \omega = 0$) при заданном давлении. Нагрузка на колесо остается постоянной и равной G . Натяжение нити и свободный радиус вращающегося колеса (при $v \neq 0$ или $\omega \neq 0$) в дальнейшем будем обозначать N_2 и R соответственно.