УДК 53; 51

Аналитическое и численное решение одной задачи стационарной теплопроводности

***Паршуто Виктория Дмитриевна*, *Горчанюк Валерия Сергеевна*,**
студенты 1-го курса кафедры «Гидротехническое и энергетическое строительство, водный транспорт и гидравлика»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Воронова Н.П., канд. техн. наук, доцент)

В конструкциях водных транспортных средств часто встречаются объекты, одна часть которых поддерживается при неизменной температуре, а другая – при изменяющейся. Важно знать распределение температур во всем объекте. В качестве неизменной температуры примем нулевую, а изменяющуюся выберем в виде линейной функции. Разобьем объект на квадратные части и поставим задачу: одна из граней прямоугольного бруса поддерживается при заданной температуре $U = y$,а на остальных гранях $U = 0$. Требуется найти установившуюся температуру в произвольной точке внутри бруса.

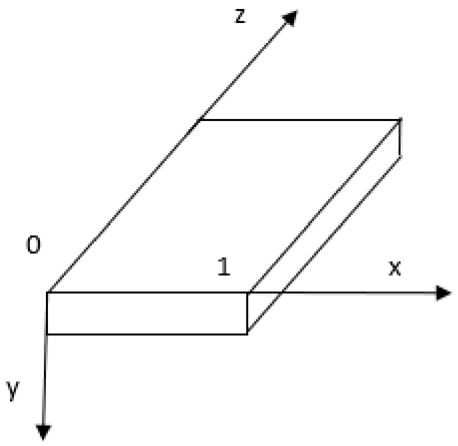

Рисунок 1 – схема объекта исследования

Из симметрии бруса, как показано на рисунке 1, следует, что температура от переменной z не зависит, поэтому ограничимся рассмотрением сечения в плоскости xoy. Так как процесс стационарный, то решение задачи удовлетворяет уравнению Лапласа[1]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

при граничных условиях

$$U/_{x=0} = 0\,, \quad U/_{x=1} = y\,, \tag{2}$$

$U/_{y=0} = 0$, $U/_{y=1} = 0$. (3)

Аналитическое решение задачи получим методом разделения переменных (методом Фурье). Представим функцию $U(x,y) = x_{(x)} \cdot y_{(y)}$, отсюда $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = x''_{(x)} \cdot y_{(y)}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} == y''_{(y)} \cdot x_{(x)}$. Подставив в уравнение (1), получим $x'' \cdot y + y'' \cdot x = 0$. Разделим обе части на $x \cdot y$, $\frac{x''}{x} = -\frac{y''}{y}$. Так как левая часть зависит только от x, а правая только от y, то это возможно лишь при условии

$$\frac{x''}{x} = -\frac{y''}{y} = \lambda^2,\ \lambda = const. \tag{4}$$

Из уравнения (4) следует $y'' + \lambda^2 y = 0$. Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, имеющее корни характеристического уравнения k=$\pm\lambda i$. Тогда его решение имеет вид $y = A\cos\lambda y + B\sin\lambda y$ и с учетом граничных условий (3), получим

$$\begin{cases} y_{(0)} = A = 0, \\ y_{(1)} = A cos\lambda + B sin\lambda = 0, \end{cases}$$

то есть Bsin$\lambda = 0$, B$\neq 0$, sin$\lambda = 0$, $\lambda_n = \pi n$, $n = 1,2,\ldots$ и $y_n = B_n sin\pi ny$. Второе из уравнений(4) $x'' - \lambda^2 x = 0$ имеет решение x=C$e^{\lambda x}$ + D$e^{-\lambda x}$=$C_n e^{\pi nx} +$ $+D_n e^{-\pi nx}$.

Общее решение уравнения (1) запишем в виде U(x ,y)=$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\pi nx} + b_n e^{-\pi nx}) sin\pi ny$, (5)

где $a_n = B_n * C_n$, $b_n = B_n * D_n$.

Граничные условия (2) для решения (5):

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) sin\pi ny = 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n e^{\pi n} + b_n e^{-\pi n}) sin\pi ny = sin\pi ny. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $a_n + b_n = 0$, а $a_n e^{\pi n} + b_n e^{-\pi n}$ $(n = 1,2,\ldots)$ являются коэффицентами разложения в ряд Фурье функции y по синусам, значит

$$a_n e^{\pi n} + b_n e^{-\pi n} = 2\int_0^1 y * sin\pi ny dy\ , \tag{6}$$

$$a_n = \frac{2}{e^{\pi n} - e^{-\pi n}} \int_0^1 y * sin\pi ny dy = \frac{2(-1)^n}{\pi n (e^{\pi n} - e^{-\pi n})},$$

$$b_n = \frac{2}{e^{-\pi n} - e^{\pi n}} \int_0^1 y * sin\pi ny dy = -\frac{2(-1)^n}{\pi n(e^{\pi n} - e^{-\pi n})}.$$

Интеграл (6) вычислим методом интегрирования по частям, в результате имеем:

$$\int_0^1 y * sin\pi ny dy = \frac{(-1)^{n-1}}{\pi n}.$$

Подставляя коэффициенты a_n и b_n в (5), получим:

$$\mathrm{U}(x; y) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 y * sin\pi y dy\right)\frac{e^{\pi nx} - e^{-\pi nx}}{e^{\pi n} - e^{-\pi n}} sin\pi ny =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{e^{\pi nx} - e^{-\pi nx}}{e^{\pi n} - e^{-\pi n}} sin\pi ny.$$

Вычислим значения функции U(x ; y) в точках $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Так, при x=$\frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{3}$ получаем для суммы первых пяти слагаемых :

$$\mathrm{U}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{5}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{e^{\frac{\pi n}{3}} - e^{-\frac{\pi n}{3}}}{e^{\pi n} - e^{-\pi n}} sin\frac{\pi n}{3} \approx 0{,}05553.$$

Эту же задачу решим численными методами, то есть методом сеток решить уравнение Лапласа для единичного квадрата с краевыми условиями u(0,y)=0; u(x,0)=0; u(1,y)=y, y∈[0,1]; u(x,1)=0, x∈[0;1].

Строим сетку, разделяя единичный квадрат на 9 равных квадратов, как показано на рисунке 2.

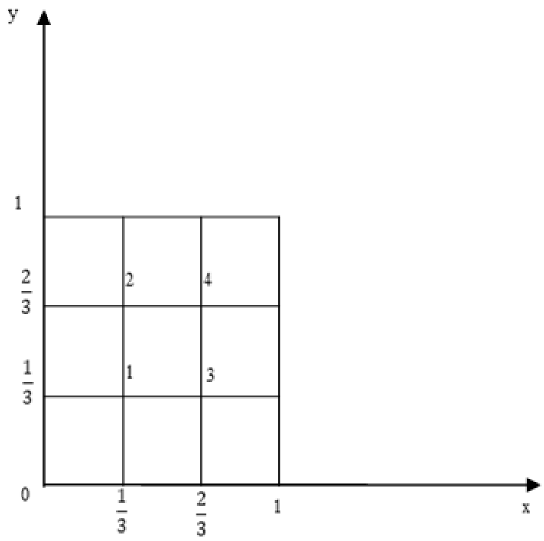

Рисунок 2 – Разбиение области сеткой

Уравнение Лапласа может быть записано для внутренних точек области (x,y) с помощью аппроксимаций [2]

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) \approx \frac{u(x - h, y) - 2u(x, y) + u(x + h, y)}{2h^2} + \tag{7}$$

$$+\frac{u(x,y-h)-2u(x,y)+u(x,y+h)}{2h^2}=0$$

где h – шаг разбиения.

Умножаем обе части уравнения (7) на постоянную $2h^2$>0 и получаем:

$$u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)-4u(x,y)=0.$$

Следовательно:

$$u(x,y)=\frac{u(x-h,y)+u(x+h,y)+u(x,y-h)+u(x,y+h)}{4}=0. \qquad (8)$$

Заменяя производные в уравнении Лапласа разностными отношениями (8), получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} u_1=\dfrac{u_2+u_3}{4}, \\ u_2=\dfrac{u_1+u_4}{4}, \\ u_3=\dfrac{u_1+u_4+\frac{1}{3}}{4}, \\ u_4=\dfrac{u_2+u_3+\frac{2}{3}}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4u_1+u_2+u_3=0, \\ u_1-4u_2+u_4=0, \\ u_1-4u_3+u_4=-\dfrac{1}{3}, \\ u_2-4u_4+u_3=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Решаем систему методом Гаусса:

$u_1\approx 0{,}055,$ $\qquad$ $u_3\approx 0{,}152,$

$u_2\approx 0{,}069,$ $\qquad$ $u_4\approx 0{,}222.$

Таким образом, численное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике имеет погрешность, вычисленную в узлах сетки, не превосходящую 0,03%.

$$\varepsilon=(0{,}0556-0{,}0553)\times 100\%=0{,}03\%.$$

Аналитическое решение является более точным, однако при незначительных изменениях в постановке задачи необходимо проводить полное решение задачи, что связано с затратами по времени. Численное решение гарантирует небольшую погрешность в полученном решении, а изменения условий в задаче связано лишь с небольшими изменениями во входных параметрах программного обеспечения [3].

Литература:

1. Уравнения математической физики: учебное издание / Воронова Н.П., Кузнецова А.А., Хотомцева М.А., Королева М.Н. / - Минск:БНТУ, 2015. – 75с.
2. Лабораторные работы по уравнениям математической физики / Воронова Н.П., Евдокименко Р.М: учебное издание/ -Минск: БНТУ, 2004. – 25с.
3. Воронова Н.П. Математическое моделирование и управление теплотехнологиями промышленных производств: монография / Н.П. Воронова. – Минск: БНТУ, 2009. – 260с.