УДК 517.3

Суммы Дарбу и геометрическая интерпретация интеграла Стилтьеса.

Кучерявенко Максим Андреевич*, студент 1-го курса*
кафедры «Геодезии и аэрокосмических геотехнологий»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Крушевский Е.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Как известно (например, [1]), определенный интеграл Римана строится как предел интегральной суммы Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ при стремлении к ∞ числа отрезков разбиения отрезка $[a;\,b]$ и при одновременном стремлении к 0 диаметра разбиения $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \Delta x_k$. При этом подразумевается, что этот предел должен существовать (и, естественно, быть одинаковым) для произвольного разбиения отрезка $[a;\,b]$ и произвольного выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$.

Обилие такого количества ограничений и параметров для отслеживания часто водит в ступор студентов, т.к. все это слабо коррелирует с теорией пределов, которые обычно изучаются студентами в предыдущем семестре.

Когда мы брали разбиение, на каждом подотрезке $[x_{k-1}; x_k]$] мы выбирали любое ξ_k. Тем самым мы пытались приблизить площадь криволинейной трапеции, находящейся над подотрезком $[x_{k-1}; x_k]$.

Однако, мы можем более четко выбрать эти точки ξ_k так, чтобы значение функции было сколь угодно близким к максимальному значению на этом подотрезке $[x_{k-1}; x_k]$, или к минимальному. Эту мысль чётко запишем в виде определения.

Определение 1. Пусть σ — некоторое разбиение отрезка $[a,\,b]$, f - функция, ограниченная на этом отрезке. Положим $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x)$, $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},\,x_k]} f(x)$, точные нижняя и верхняя грань множества значений. Если попроще – то наименьшее и наибольшее значения, если это не противоречит структуре самого множества значений. Числа $s_\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$, $S_\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$ называются нижней и верхней суммами Дарбу функции f при разбиении σ.

Суммы Дарбу похожи на интегральные суммы Римана. Ясно, что любая интегральная сумма для данного разбиения заключена между верхней и нижней суммами для этого разбиения. Легко видеть, что при измельчении разбиения верхняя сумма уменьшается, а нижняя – увеличивается.

Определение 2. Для ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f числа $I_* = \sup s_\sigma$ и $I^* = \inf S_\sigma$, где супремум и инфимум берутся по всем разбиениям σ отрезка, называются нижним и верхним интегралами Дарбу функции f на отрезке $[a, b]$.

Заметим, что здесь нет непонятных предельных переходов, а лишь (тоже, видимо, не сильно понятные) верхняя и нижняя грани соответствующих множеств. И все это для того, чтобы сформулировать

Теорема 1. (Дарбу) Функция f интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда она ограничена на этом отрезке, и $I_* = I^*$, при этом они и дают значение определенного интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Суммы Дарбу являются универсальным средством для введения обобщений определенного интеграла Римана.

Пусть задана пара ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций f и g. По стандартным схемам составим три интегральные суммы:

$\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta g_k$, где $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$ - интегральная сумма Стилтьеса;

$s_\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,\Delta g_k$, $S_\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} M_k\,\Delta g_k$ - нижняя и верхняя суммы Дарбу-Стилтьеса, которые при повторении всех рассуждений, проведенных выше, приводят нас в интегралу Стилтьеса $(\mathrm{S})\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \lambda\to 0}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta g_k$.

Интеграл Римана является частным случаем интеграла Стилтьеса при $g(x) = x$. Интеграл Стилтьеса широко применяется, к примеру, в задачах теоретической механики и сопромата.

Предположим, что на балку длиной l, покоящуюся на двух опорах (Рис. 1), кроме непрерывно распределенной нагрузки действуют также и сосредоточенные силы.

Расположим ось Ox вдоль по оси балки, а ось Oy вертикально вниз. Не делая различий между действующими силами, обозначим для $x > 0$ через $F(x)$ сумму всех сил, приложенных на отрезке $[0, x]$ балки, включая и реакции опор. Далее, пусть $F(0) = 0$. Силу $F(x)$ называют перерезывающим усилием в сечении x балки. При этом силы, направленные вниз, будем считать положительными, а вверх - отрицательными. Поставим задачей определить так называемый изгибающий момент M в произвольном сечении $x = \xi$ балки. Под этим подразумевают сумму моментов всех сил, действующих на правую (или на левую) часть балки, относительно этого сечения. При этом, когда речь идет о правой части балки, момент считают положительным, если он вращает эту часть по часовой стрелке (для левой части обратное правило).

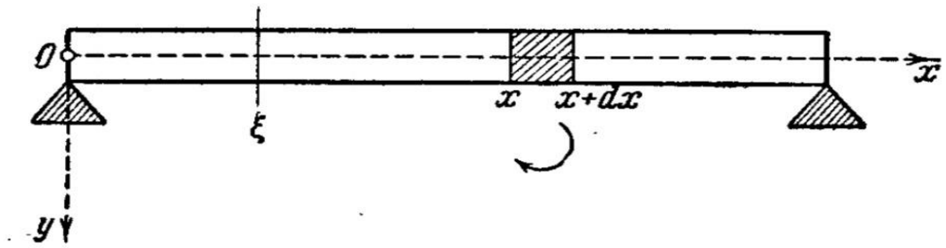

Рисунок 1 – Балка, покоящаяся на двух опорах

Пусть на элементе $[x, x+dx]$, находящемся справа, приложена сила $F(x+dx) - F(x) = dF(x)$, создающая элементарный момент $dM = (x-\xi)\, dF(x)$. Тогда, проведя стандартное суммирование по принципу интегральной суммы, получим $M = M(\xi) = (\mathrm{S})\int_{\xi}^{1}(x-\xi)dF(x)$. Аналогично, для левой части балки, можно получить (учитывая изменение положительного направления для отсчета моментов)

$$M = M(\xi) = (\mathrm{S})\int_{0}^{\xi}(\xi - x)dF(x) \qquad (1)$$

На самом деле оба выражения для изгибающего момента тождественны. Их равенство равносильно условию $\int_{0}^{1} x\, dF(x) - \xi\, F(l) = 0$, которое является следствием из условий равновесия $F(l) = 0; \int_{0}^{l} x dF(x) = 0$, выражающих равенство нулю суммы всех сил и суммы моментов (относительно начала) всех сил, действующих на балку.

Если интенсивность непрерывно распределенной нагрузки обозначить через $q(x)$, то, исключая точки, где приложены сосредоточенные силы, получим $\frac{dF(x)}{dx} = q(x)$. Пусть сосредоточенные силы F_j ($j = 1,2,..., k$) –приложены в точках $x = x_j$. Тогда, очевидно, перерезывающее усилие именно в этих точках имеет скачки, соответственно равные F_j. Далее, применяя к интегралу (1) формулу, выражающую интеграл Стилтьеса через интеграл Римана с учетом скачков, получим изгибающий момент $M(\xi) = (\mathrm{R})\int\limits_0^{\xi} (\xi - x)\, q(x)\, dx + \sum\limits_{x_j<\xi} (\xi - x_j)\, F_j$.

Геометрический смысл интеграла Римана-Стилтьеса. Если представить трёхмерный график с *x*, *f(x)* и *g(x)* по всем ортогональным осям, то это позволяет геометрически интерпретировать интеграл Римана –Стилтьеса.

Если плоскость *g*(*x*) - *x* горизонтальна, а направление *f*(*x*) направлено вверх, то рассматриваемая поверхность похожа на изогнутый забор. Забор следует по кривой, описываемой *g*(*x*), а высота забора определяется *f*(*x*). Забор (Рис. 2) - это участок *g*(*x*)-плоскости (т. е. кривая *g*(*x*), вытянутая вдоль оси *f*(*x*)), ограниченный *g*(*x*) – *x*-плоскостью и *f*(*x*)-плоскостью.

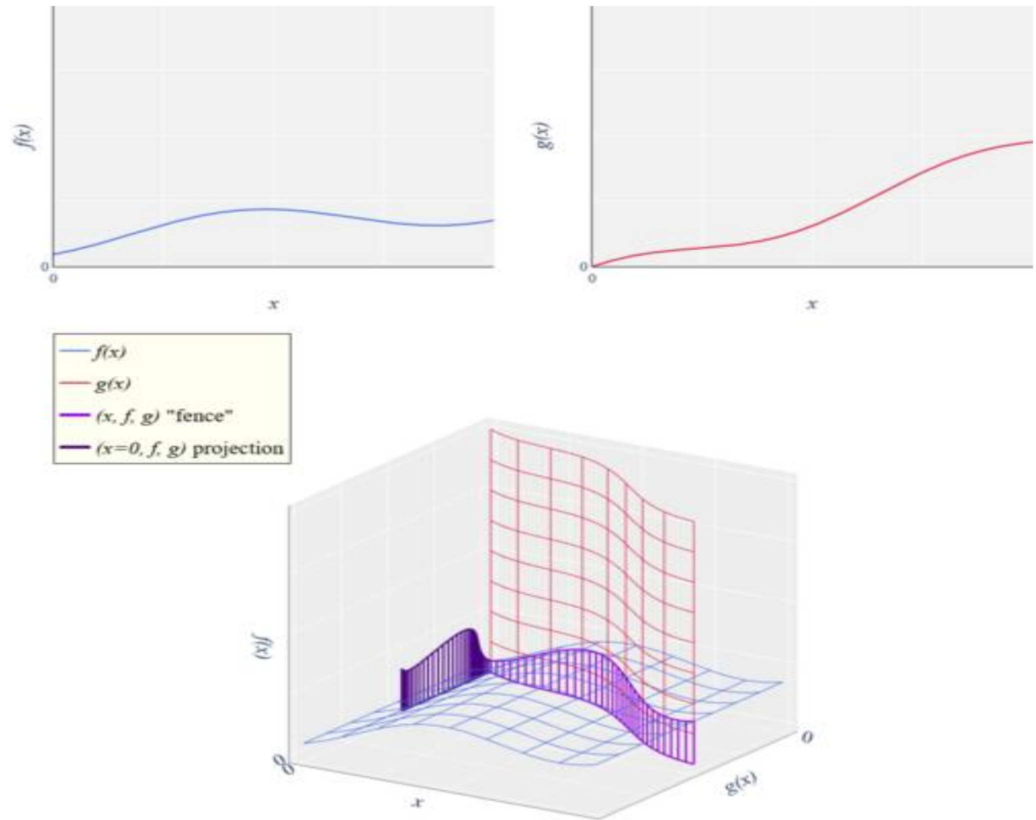

Рисунок 2 – Геометрическая интерпретация интеграла Римана–Стилтьеса на трёхмерном графике

Интеграл Римана-Стилтьеса – это площадь этого забора на некотором отрезке, тогда как интеграл Римана это площадь его проекции или же «тени».

Литература:

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3 : учебник / Г. М. Фихтенгольц . – СПб. : Лань, 2009 . – 657 с.