УДК 514.122.4 + 517.9

Задача о брахистохроне

***Жуковский Владислав Валентинович**, студент 1-го курса*
кафедры «Мосты и тоннели»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Чернявская С.В., канд. физ-мат. наук, доцент)

Задача о брахистохроне (от греч. brachistos - кратчайший и chronos - время), или о кривой скорейшего спуска, была поставлена швейцарским математиком И. Бернулли в 1696 г. и заключалась в следующем: среди всех кривых, проходящих через две заданные точки A и B, не лежащие на одной вертикали, найти такую, двигаясь по которой под действием силы тяжести. материальная точка скатится из A в B за кратчайшее время (Рис.1).

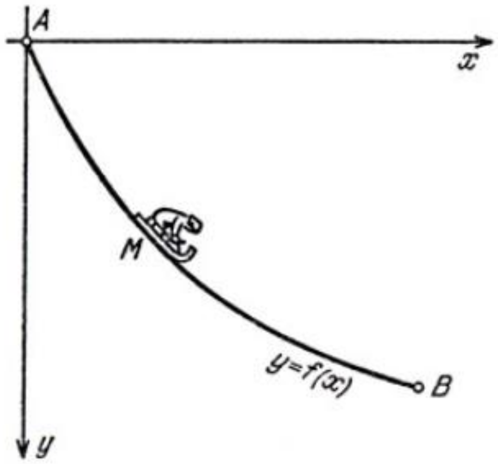
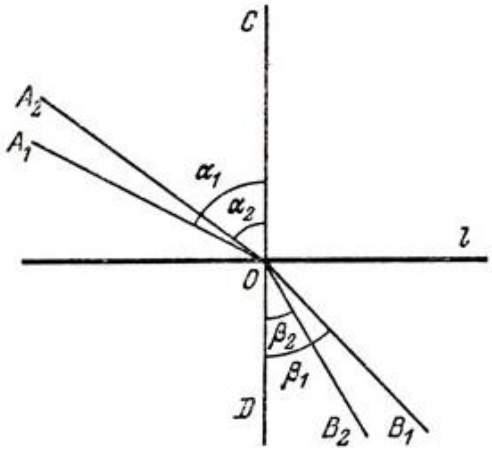


Рисунок 1 – График

Эта задача решалась лучшими математиками тех времен и была решена усилиями Г. В. Лейбница, И. Ньютона, Г. Лопиталя и братьев Бернулли. После публикации задачи о брахистохроне, одним из первых кто ее решил, был Лейбниц. Он сказал, что эта задача может положить начало новой математической эпохе. После него были брат Иоганна (Якоб Бернулли) и Лопиталь. Но, кроме названных, было опубликовано и еще одно безымянное решение, в котором знатоки ex unge leonem ("как по когтям узнают льва" - эту латинскую поговорку процитировал И. Бернулли) сразу же узнали Ньютона, позже он признался, что потратил на решение задачи всю ночь непрерывного обдумывания.

Для решения задачи обратимся к Закону Снеллиуса, суть которого в том, что соотношение синусов угла падения и угла преломления света всегда остается постоянным (Рис.2),



$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2}$$

Рисунок 2 – График

и принципу Ферма, значение которого в том, свет распространяется между двумя точками вдоль такого пути, на преодоление которого требуется наименьшее время.

Для примера рассмотрим рисунок, на котором изображена слоистая среда. В каждом отдельном слое скорость света постоянна, но она убывает при переходе от вышележащего слоя к нижележащему. Падающий луч света при переходе от слоя к слою преломляется все больше и больше по направлению к вертикали (Рис.3).

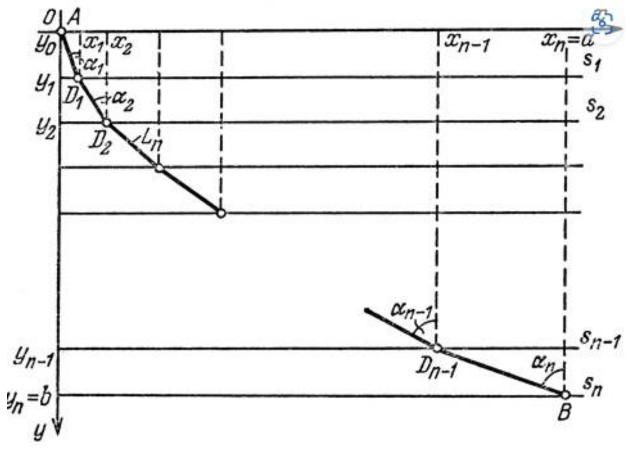


Рисунок 3 – График

Применив закон Снеллиуса к границам между слоями, получим, что отношение синуса угла преломления к скорости на первом участке будет равна этому же отношению, но уже на последующих.

Допустим, что толщина слоев неограниченно уменьшается, а число слоев неограниченно растет. Тогда в пределе скорость света убывает непрерывно, и мы заключаем, что отношение синуса бесконечно уменьшающегося угла к скорости на любом участке будет равна константе.

$$\frac{\sin\alpha(x)}{v} = const$$

Возвращаясь теперь к задаче о брахистохроне, введем систему координат на плоскости таким образом, как это указано на рисунке 3, и представим себе, что шарик (подобно лучу света) способен выбрать себе такую траекторию спуска от A до B, чтобы время спуска было наименьшим. Исходя из принципа сохранения энергии получаем, что скорость, достигнутая шариком на заданном уровне, зависит только от потери потенциальной энергии при достижении этого уровня, а не от вида траектории, по которой скатывается шарик. Это означает, что его скорость будет равна:

$$v = \sqrt{2gy}$$

После этого уравнение примет вот такой вид

$$\frac{\sin\alpha(x)}{\sqrt{2gy}} = const$$

где α(x) - угол между касательной к кривой f(x) и осью Oy. Как известно, угловой коэффициент (т. е. тангенс угла, образованного касательной к графику функции f в точке x с осью Ox) равен f'(x). Отсюда сразу следует, что f'(x) = tg ((π/2) - α(x)) = cos α(x)/sin α(x), и значит:

$$\sin\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

Из этого вытекает следующее уравнение:

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2}\sqrt{f(x)} = C$$

где C - некоторая константа. Иначе говоря, функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$y' = \sqrt{\frac{C - y}{y}}$$

Даже во времена Бернулли было известно, что это дифференциальное уравнение циклоиды. Осталось только подставить несколько переменных и проинтегрировать уравнение, и мы получим:

$$x = R(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = R(1 - \cos\varphi)$$

Результатом решения задачи о брахистохроне оказалась циклоида, также называемая трохоидой или рулеттой. Это кривая, которую описывает точка на окружности, катящаяся по прямой без скольжения (Рис.4).

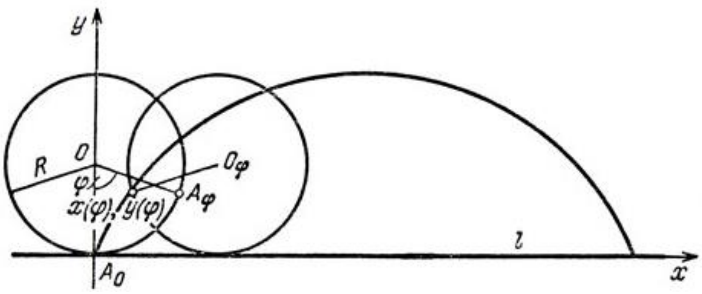


Рисунок 4 – График

Она знаменита тем, что, помимо значимости ее решения с научной точки зрения, она стала источником идей совершенно новой области математики - вариационного исчисления.

Литература:

1. Тихомиров, В. М. Рассказы о максимумах и минимумах / В. М. Тихомиров. – 2-е изд., исправленное – Москва : МЦНМО, 2006. – 200 с.
2. Амелькин, В. В. Математические модели и дифференциальные уравнения / В. В. Амелькин, А. П. Садовский. – М. : Выш. школа, 1982. – 271 с.