

Формула интегрирования по частям для определенного интеграла и ее доказательство через интегральные суммы Стилтеса

*Береснев Дмитрий Владимирович, студент 1-го курса
кафедры «Строительные материалы и технология строительства»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Крушевский Е.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)*

Как известно (например, [1]), определенный интеграл Римана строится как предел интегральной суммы Римана $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ при стремлении к ∞ числа отрезков разбиения отрезка $[a; b]$ и при одновременном стремлении к 0 диаметра разбиения $\lambda = \max_{k=1, n} \Delta x_k$. При этом подразумевается, что этот предел должен существовать (и, естественно, быть одинаковым) для произвольного разбиения отрезка $[a; b]$ и произвольного выбора точек $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$.

Другими словами, существенным является наличие Δx_k в интегральной сумме, что соответствует dx в самом определенном интеграле. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона-Лейбница позволяет больше не возвращаться к интегральным суммам – нашел первообразную, подставил пределы интегрирования и результат готов.

С другой стороны, в свойствах определенного интеграла упоминаются и замена переменных и непосредственное интегрирование по частям. При этом, никто не заботится о том, с какими интегралами и интегральными суммами имеют дело.

В частности, формула замены переменных в определенном интеграле $\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ выглядит весьма несложной. Но это только до той поры, пока вы не попытаетесь написать интегральную сумму для правой части и поймете, что слева и справа стоят площади совершенно разных криволинейных трапеций, равенство площадей которых вы пытаетесь таким нелепым образом доказать.

Что касается формулы интегрирования по частям $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, то

внимательный читатель должен увидеть, что интегралов Римана в этой формуле ни слева, ни справа нет. Тогда, что за интегралы здесь присутствуют?

На самом деле, интегралы и слева, и справа – это определенные интегралы Римана-Стилтьеса.

Пусть задана пара ограниченных на отрезке $[a, b]$ функций f и g . По стандартным схемам составим интегральную сумму Римана-Стилтьеса

$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k$, где $\Delta g_k = g(x_k) - g(x_{k-1})$. Предел этой интегральной суммы при

известных предположениях, приводят нас к интегралу Стилтьеса

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta g_k. \text{ Отметим, что интеграл Римана является}$$

частным случаем интеграла Римана-Стилтьеса при $g(x) = x$.

Применим указанный выше подход к правой части формулы интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b u dv &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) (v(x_k) - v(x_{k-1})) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) v(x_k) - \sum_{k=1}^n u(\xi_k) v(x_{k-1}) = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n u(\xi_k) v(x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} u(\xi_{k+1}) v(x_k) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \left(u(\xi_n) v(x_n) + \sum_{k=1}^{n-1} u(\xi_k) v(x_k) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=1}^{n-1} u(\xi_{k+1}) v(x_k) - u(\xi_0) v(x_0) \right) = L. \end{aligned}$$

Здесь немного поясним, что $x_n = b, x_0 = a$ - по определению, а под предельным переходом также можно считать, что $\xi_n = b, \xi_0 = a$. Таким образом, мы можем продолжить преобразования:

$$L = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^{n-1} v(x_k)(u(\xi_{k+1}) - u(\xi_k)) = L_1$$

Здесь следует пояснить, что ввиду того, что точки x_k и ξ_k инвариантны между собой, т.е. если $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, то $x_k \in [\xi_{k-1}; \xi_k]$, то в выражении L_1 под пределом как раз и стоит интегральная сумма Римана-Стилтьеса из правой части формулы интегрирования по частям для определенного интеграла.

Литература:

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3 : учебник / Г. М. Фихтенгольц . – СПб. : Лань, 2009 . – 657 с.