

## Идея доказательства теоремы Чебышева об интегрируемости иррационального (биномиального) дифференциала

*Алексейчик Алексей Сергеевич, студент 1-го курса  
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»  
Белорусский национальный технический университет, г. Минск  
(Научный руководитель – Крушевский Е.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)*

Как известно, в 1853 году известный русский математик Пафнутий Львович Чебышев доказал теорему о трех случаях интегрируемости дифференциальных биномов вида  $J = \int x^m (a + bx^n)^p dx$  в которой существенным образом используется факт того, что показатели  $m, n, p$  являются рациональными дробями. Более точно, П. Л. Чебышев доказал, что 3 случая соотношений между показателями ( $p \in \mathbb{Z}$ , либо  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , либо  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ ) являются необходимыми условиями интегрируемости  $J$ . Достаточность (т.е. сами подстановки) была известна еще в XVIII веке.

В оригинальной работе [1] П. Л. Чебышев (оригинальный текст 1853 года) «Посредствомъ доказанныхъ нами теоремъ можно вполне рѣшить вопросъ объ интегрировании, при помощи однихъ алгебраическихъ и логарифмическихъ знаковъ, биномиальныхъ дифференциаловъ  $x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx$ , гдѣ  $s, s', s''$  рациональные числа».

Что же это за такие алгебраические и логарифмические знаки?

Если внимательно посмотреть на таблицу интегралов, то (за исключением экспонент - показательной функции и ее синус и косинус-модификаций), в правой части (то есть значения табличных интегралов) нет ничего, кроме либо алгебраических (рациональных) функций и их логарифмов. Поэтому, основываясь на некоторых результатах других известных математиков 19 века (норвежец Нильс Абель и француз Жозеф Лиувиль), П. Л. Чебышев резонно предположил, что если дифференциальный бином можно проинтегрировать в конечном виде, то результат будет содержать либо алгебраические, либо логарифмические слагаемые.

Далее, вычтя из подынтегрального бинома все производные от алгебраических слагаемых, П. Л. Чебышев свел все к подсчету числа логарифмических слагаемых, которых должно быть конечное число.

Дальнейшие рассуждения базировались на комплексных корнях уравнения  $x^m - 1 = 0$ , где  $m$  – параметр, соответствующий знаменателю дроби  $p$  в интеграле

Л. В частности, П. Л. Чебышев полученный результат сформулировал в виде 3 теорем касательно ливилевского интеграла  $\int \frac{f(x)}{F(x)\sqrt[m]{\theta(x)}} dx$ , где все функции из подынтегрального выражения являются целыми.

Интеграл от дифференциального бинома  $x^s(a+bx^{s'})^{s''} dx$  был преобразован к виду  $\int x^{p-1}(1+x^q)^{\frac{m'}{m}} dx$ , где  $p, q, m, m'$  – целые и  $q > 0$ , после чего П. Л. Чебышев отметил, что значение такого интеграла легко находится известными методами если целым является одно из двух отношений  $\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ .

В противном случае, интеграл может быть преобразован к виду  $U_0 + \int \frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$ , где  $U_0$  – алгебраическая функция. После применения результатов первой теоремы ко второму интегральному слагаемому выясняется, что там остались только логарифмические члены. Однако, это оказывается невозможным из-за того, что с одной стороны степень подынтегральной функции должна быть не выше  $-1$ , а с другой стороны – не должна быть ниже  $-1$ , что означает, что степень должна быть в точности  $1$ , или  $\frac{p'}{q} - \frac{m''}{m} = 0$ .

Таким образом, П. Л. Чебышев показал все 3 известных случая интегрируемости дифференциального бинома и доказал тот факт, что никакие другие соотношения коэффициентов не позволят проинтегрировать дифференциальный бином в конечной форме.

Что касается других подходов к вычислению интеграла от дифференциального бинома, то обращение на сайт Wolfram Alpha [2] мгновенно дает выражение такого интеграла через гипергеометрическую функцию Гаусса:

Indefinite integral

$$\int x^m (a + b x^n)^p dx = \frac{x^{m+1} (a + b x^n)^p \left(\frac{b x^n}{a} + 1\right)^{-p} {}_2F_1\left(\frac{m+1}{n}, -p; \frac{m+n+1}{n}; -\frac{b x^n}{a}\right)}{m+1} + \text{constant}$$

${}_2F_1(a, b; c; x)$  is the hypergeometric function

или с коэффициентами Чебышева

$$\int x^{p-1} (1+x^q)^{m1/m} dx = \frac{x^p {}_2F_1\left(-\frac{m1}{m}, \frac{p}{q}; \frac{p+q}{q}; -x^q\right)}{p} + \text{constant}$$

${}_2F_1(a, b; c; x)$  is the hypergeometric function

из которых сразу видны случаи интегрируемости в конечном виде, т.е. возможности представления гипергеометрической функции через элементарные.

#### Литература:

1. Чебышев, П.Л. Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева : [в 5 томах] / П.Л. Чебышев ; АН СССР. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1944–1951. – Т. 2 : математический анализ. – 1947. – 520 С.
2. Wolfram Alpha: расчетный комплекс [Электронный ресурс]. – Режим доступа : [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) – Дата доступа : 28.04.2025.