УДК 517.3

Замена переменных в двойном интеграле

***Ндонг Мбасого Фелипе Бакале**, студент 1-го курса*
кафедры «Строительные материалы и технология строительства»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Крушевский Е.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Как известно, замена переменных в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

следует из соответствующей формулы замены переменных для неопределенного интеграла $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$. При этом никто не пытается ее выводить через интегральные суммы, что было бы весьма непросто.

Необходимость иметь возможность делать замену переменных в двойных и тройных интегралах очевидно, однако формула этой замены весьма неочевидна. Кажущаяся простота замены переменных в неопределенном интеграле может создать иллюзию возможности сделать нечто подобное и для двойного интеграла. В самом деле, если $x = x(u,v), y(u,v)$, то формально $dx = x'_u\,du + x'_v\,dv$, $dy = y'_u\,du + y'_v\,dv$. Но любые попытки их перемножить, чтобы получить уже двойной интеграл $du\,dv$, ни к чему не приводят. Это легко увидеть, взяв полярную замену переменных. Здесь $dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$, $dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi$ и понятно, что из $dx\,dy$ никак не получить известные $r\,dr\,d\varphi$.

Для обоснования формулы замены переменных в двойном интеграле изучим связь между элементарными площадками на плоскости *Oxy* (прямоугольник со сторонами Δx и Δy) и (его образом) на плоскости *Ouv*.

Элементарный прямоугольник на плоскости *Ouv* (Рис. 1) переходит в (в общем случае) в некоторый криволинейный четырехугольник на плоскости *Oxy* ([1]). Здесь существенным является не только дифференцируемость, но и взаимная однозначность функций замены.

Вершины этого криволинейного прямоугольника находятся в точках $(x(u,v),y(u,v))$, $(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))$, $(x(u+\Delta u,v+\Delta v),y(u+\Delta u,v+\Delta v))$, $(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))$. Не ограничивая общности, мы будем считать этот криволинейный четырехугольник параллелограммом. Преобразуем координаты его вершин, используя теорему Лагранжа о конечных приращениях. При этом бесконечно малые величины порядков, выше первого, отбросим.

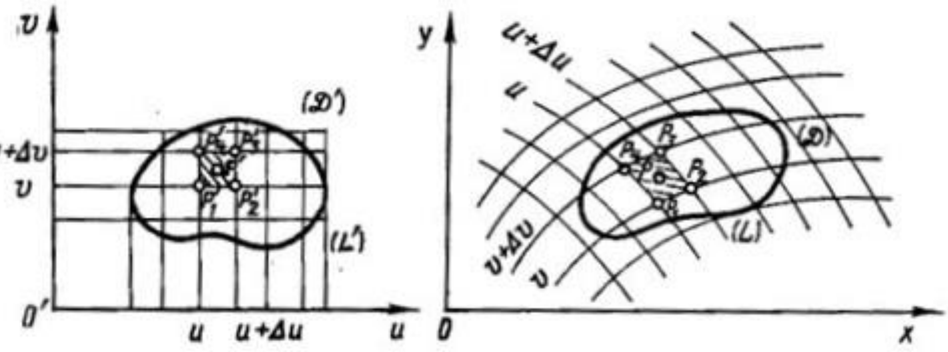

Рисунок 1 – Преобразование координатной сетки.

$(x_1, y_1) = (x(u,v), y(u,v))$ $\qquad$ $(x_3, y_3) = (x(u,v) + x'_u\, du + x'_v\, dv,\ y(u,v) + y'_u\, du + y'_v\, dv)$

$(x_2, y_2) = (x(u,v) + x'_u\, du, y(u,v) + y'_u\, du)$ $\qquad$ $(x_4, y_4) = (x(u,v) + x'_v\, dv, y(u,v) + y'_v\, dv)$.

Заметим, что выше подобные формулы уже возникали, однако простое умножение здесь не подходит. А вот площадь параллелограмма, найденная с помощью определителя второго порядка (длина векторного произведения векторов на плоскости)

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_2 \\ x_3 - x_2 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \left|(x'_u\, du + x'_v\, dv) y'_v\, dv - (y'_u\, du + y'_v\, dv)\, x'_v\, dv)\right| = \operatorname{mod}\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix},$$

представляем собой взятый по модулю так называемый якобиан (определитель матрицы Якоби – матрицы производных от функций замены переменных).

Теперь становится более понятным, что при замене переменных в любом интеграле, полученном из интегральных сумм Римана, замена переменных должна учитывать изменение меры элементарного участка фигуры, по которой проводится интегрирование. Действительно, если для неопределенного интеграла замена переменных опирается на инвариантность формы дифференциала $d\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt$, то замена переменных в определенном интеграле происходит на основании изменения длины элементарного отрезка разбиения $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \varphi'(\tilde{t}_k)(t_k - t_{k-1}) = \varphi'(\tilde{t}_k)\Delta t_k$, где $\tilde{t}_k \in [t_k, t_{k-1}]$.

Требование взаимной однозначности для функций замены переменных является немного чрезмерным. Так, полярная система координат $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ такой взаимной однозначностью обладает лишь на отрезке $\varphi \in [0, \pi/2]$, тем не менее мы считаем, что $\varphi \in [0, 2\pi]$. Однако следующий простой пример показывает, что этим требованием пренебрегать нельзя.

Рассмотрим плоскую область, ограниченную четырьмя параболами $y=2-x^2$, $y=-1-x^2$, $y=x^2-2$, $y=x^2+1$ (Рис. 2) и попробуем найти ее площадь с помощью замены переменных в двойном интеграле.

Видно, что из-за симметрии можно посчитать площадь четверти области, которая будет выражена двумя определенными интегралами:

$\frac{1}{4}S=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^2+1)\,dx+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx=\frac{7\sqrt{2}}{12}+\frac{5\sqrt{2}}{12}=\sqrt{2}$, значит, вся площадь это $4\sqrt{2}$.

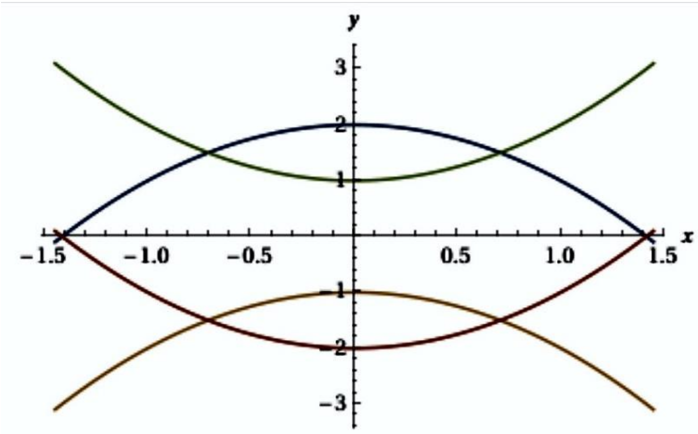

Рисунок 2 – Область, ограниченная параболами.

Очевидно, то ни одна граничная кривая не обладает свойством взаимно однозначного соответствия между переменными. Тем не менее, попробуем сделать замену переменных $u=y+x^2, v=y-x^2$. Ведь очень привлекательно выглядят граничные кривые $u=-1, u=2, v=-2, v=1$ - постоянные пределы интегрирования в новой системе координат. Для вычисления якобиана надо записать обратные функции $y=\frac{u+v}{2}$, $x=\pm\sqrt{\frac{u-v}{2}}$ и сразу становится понятно, что, наличие переменного знака не позволит нам провести дальнейшие вычисления. Попробуем ограничиться правой половиной этой области ($x\geq 0$).

Якобиан выглядит так: $\begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2u-2v}} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2u-2v}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{2u-2v}}$. Таким образом, в новой системе координат область интегрирования выглядит как показано на Рис. 3.

Придется опять разбивать область на части:

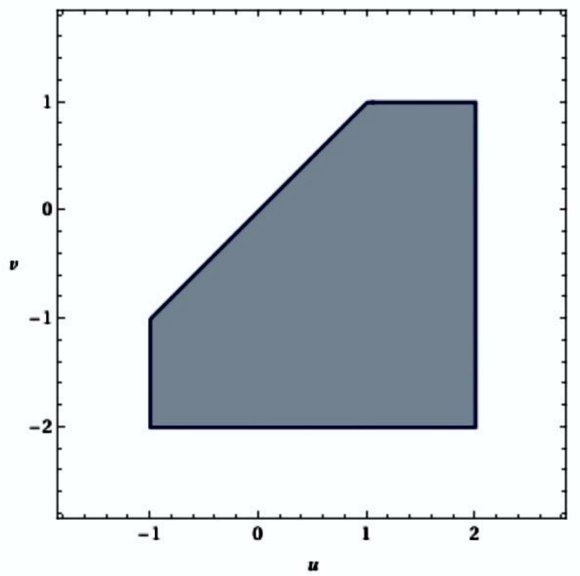

Рисунок 3 – Новая область интегрирования.

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \int_{-2}^{u} \frac{dv}{\sqrt{2u-2v}} + \frac{1}{2}\int_{1}^{2} du \int_{-2}^{1} \frac{dv}{\sqrt{2u-2v}} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} du \sqrt{2u-2v}\Big|_{-2}^{u} - =$$

$$-\frac{1}{2}\int_{1}^{2} du \sqrt{2u-2v}\Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \sqrt{2u+4}\, du - \frac{1}{2}\int_{1}^{2}\left(\sqrt{2u-2} - \sqrt{2u+4}\right) du = 2\sqrt{2},$$ т.е. вся площадь равна $4\sqrt{2}$.

Таким образом, данный пример подтверждает, что при проведении замены переменных в двойном интеграле следует более тщательно относится к требованиям взаимной однозначности функций замены.

Литература:

1. Герасимович, А.И. Математический анализ: справочное пособие : в 2 ч., Часть 2 / А.И. Герасимович, Н.П. Кеда, М.Б. Сугак. – Мн.: Выш. шк., 1990. — 272 с: ил.