УДК 517.3

Теорема Чебышева об интегрируемости иррационального дифференциала и ее обобщение Мордухай-Болтовским Д.Д.

Саакян Степан Сейранович, *студент 1-го курса*
кафедры «Геодезия и аэрокосмические геотехнологии»
Белорусский национальный технический университет, г. Минск
(Научный руководитель – Крушевский Е.А., канд. физ.-мат. наук, доцент)

Как известно, в 1853 году известный русский математик Пафнутий Львович Чебышев доказал теорему о трех случаях интегрируемости дифференциальных биномов вида $J = \int x^m (a + bx^n)^p dx$ в которой существенным образом используется факт того, что показатели *m*, *n*, *p* являются рациональными дробями [1]. Более точно, П. Л. Чебышев доказал, что 3 случая соотношений между показателями ($p \in \mathbb{Z}$, либо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, либо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$) являются необходимыми условиями интегрируемости *J*. Достаточность (т.е. сами подстановки) была известна еще в XVIII веке.

Другой русский и советский математик Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовский в 1926 году опубликовал статью, в которой привел достаточное и необходимое условие интегрируемости в конечном виде дифференциального бинома в случае иррациональных показателей.

Теорема Мордухай-Болтовского Д.Д. формулируется следующим образом (приведена оригинальная орфография и стилистика, [2]). Интеграл дифференциального бинома *J*

- в случае *p* иррационального выражается в конечном виде только при следующих условиях:

1) $\frac{m+1}{n}$ целое положительное число,

2) $\frac{m+1}{n} + p$ целое отрицательное число;

- в случае *p* рациональном, если $\frac{m+1}{n}$ рационально,

при 1) $\frac{m+1}{n}$ целом числе,

2) $\frac{m+1}{n} + p$ целом,

3) p целом

независимо от того, рациональны или иррациональны m, n.

Если же $\dfrac{m+1}{n}$ иррационально, то только при p целом положительным числом.

Следует отметить, что сама формулировка теоремы является весьма сложной и запутанной. Про ее доказательство, которое существенным образом опирается на более ранние работы Мордухай-Болтовского Д.Д. (1913 год, Известия Варшавского Университета) и говорить не приходится.

В самой статье 1926 года Мордухай-Болтовский Д.Д. приводит многочисленные примеры, демонстрирующие (согласно своей теореме) как интегрируемые в конечном виде, так и неинтегрируемые в конечном виде. Мы решили проверить некоторые из этих примеров для случая иррационального p. в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica и ее облегченной интернет-версии Wolfram Alpha (WA) [3].

1. Сначала рассмотрим интеграл $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^{\sqrt{2}-1}dx$. Здесь $m=\dfrac{1}{2}, n=\dfrac{1}{3}$, т.е. условие теоремы не выполняется, т.к. $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{3/2}{1/3}=\dfrac{9}{2}\notin\mathbb{Z}$ и интеграл вычислить в конечном виде (т.е. через элементарные функции) нельзя. WA это подтверждает, выдав решение в виде гипергеометрического ряда (специальная функция):

Indefinite integral

$$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{\sqrt{2}-1} dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\,{}_2F_1\left(\frac{9}{2}, 1-\sqrt{2}; \frac{11}{2}; -\sqrt[3]{x}\right) + \text{constant}$$

${}_2F_1(a, b; c; x)$ is the hypergeometric function

2. Теперь рассмотрим интеграл $\int \sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^{\sqrt{2}-1} dx$. Здесь $m=\dfrac{1}{3}, n=\dfrac{2}{3}$, т.е. условие теоремы выполняется, т.к. $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{4/3}{2/3}=2\in\mathbb{Z}$ и интеграл вычислить в конечном виде (т.е. через элементарные функции) согласно теореме уже можно. WA это также подтверждает:

Indefinite integral | Approximate form

$$\int \sqrt[3]{x}\left(1+x^{2/3}\right)^{\sqrt{2}-1} dx = \frac{3}{4}\left(x^{2/3}+1\right)^{\sqrt{2}}\left(2\left(\sqrt{2}-1\right)x^{2/3}+\sqrt{2}-2\right) + \text{constant}$$

Чисто внешне результат выглядит несколько иначе, чем в оригинале

$$J=\frac{3}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}(\sqrt{2}\sqrt[3]{x^3}-1)\,(1+\sqrt[3]{x^2})^{\sqrt{2}}+C.$$

Нетрудно видеть, однако, что с точностью до несложных преобразований оба ответа идентичны.

Литература:

1. Чебышев, П.Л. Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева : [в 5 томах] / П.Л. Чебышев ; АН СССР. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1944–1951. – Т. 2 : математический анализ. – 1947. – 520С.
2. Мордухай-Болтовский, Д.Д. Об интегрировании в конечном виде дифференциальных биномов в случае иррациональных показателей // Известия физико-математического общества при Казанском университете, серия 3, т.1. Казань, 1926, С.14-25.
3. Wolfram Alpha: расчетный комплекс [Электронный ресурс]. – Режим доступа : www.wolframalpha.com – Дата доступа : 28.04.2025.