

<https://doi.org/10.21122/1029-7448-2025-68-3-259-273>

УДК 628-385

Аналитическое решение математической модели анаэробного брожения в проточном биореакторе при производстве биогаза

В. А. Седнин¹⁾, П. П. Храмцов¹⁾, Н. А. Седнин¹⁾

¹⁾Белорусский национальный технический университет (Минск, Республика Беларусь)

Реферат. В статье рассмотрены современное состояние и перспективы развития технологий производства биогаза (биометана) при утилизации органических отходов. Актуальность проблемы определяется тем, что опыт эксплуатации биогазовых комплексов в условиях Республики Беларусь при генерации биогаза только из органических отходов показал низкую экономическую эффективность. В то же время решение важной задачи по утилизации производственных и бытовых отходов с одновременным получением энергетического ресурса и органического удобрения является не только необходимым, но и привлекательным результатом как с экологической, так и энергетической стороны. Состояние данной проблемы за рубежом показывает наличие потенциала для развития биотехнологий в нашей стране как в технологическом, так и в системно-конструктивном оформлении биогазовых комплексов. Реализация этого потенциала на практике предполагает наличие у разработчиков адекватного математического аппарата, описывающего процессы переноса в биореакторах. Приводится аналитическое решение математической модели процесса сбраживания органических отходов, которое предполагается использовать для исследования процессов переноса в биотенках проточного типа при конструировании гибридных энерготехнологических систем генерации биогаза с применением альтернативных источников энергии. Показано, что выбранная для исследования математическая модель и полученное ее аналитическое решение достаточно хорошо согласовываются с известными эмпирическими зависимостями, полученными для описания непрерывного режима работы проточного биореактора, и находятся в хорошем соответствии с результатами численных расчетов аналитических моделей целого ряда других исследователей. Данное аналитическое решение позволяет определять характерные зависимости темпа производства биогаза, динамику скорости его генерации, изменения концентрации питательного вещества, усвояемого бактериями, и концентрации бактерий в биореакторе проточного типа в зависимости от скорости подачи питательных веществ в биореактор. Полученные решения в дальнейшем предполагается использовать при синтезе алгоритмов управления разрабатываемой многосырьевой гибридной энерготехнологической системой для генерации и обогащения биогаза проточно-накопительного типа с использованием альтернативных источников энергии.

Ключевые слова: анаэробное сбраживание, биогаз, биотенки проточного типа, возобновляемые источники энергии, декарбонизация, интегрированные системы, математическая модель, многостадийный процесс, непрерывный режим, переработка отходов, управление

Для цитирования: Седнин, В. А. Аналитическое решение математической модели анаэробного брожения в проточном биореакторе при производстве биогаза / В. А. Седнин, П. П. Храмцов, Н. А. Седнин // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2025. Т. 68, № 3. С. 259–273. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2025-68-3-259-273>

Адрес для переписки

Седнин Владимир Александрович
Белорусский национальный технический университет
просп. Независимости, 65/2,
220013, г. Минск, Республика Беларусь
Тел.: +375 17 293-92-16
vsednin@bntu.by

Address for correspondence

Sednin Vladimir A.
Belarusian National Technical University
65/2, Nezavisimosty Ave.,
220013, Minsk, Republic of Belarus
Tel.: +375 17 293-92-16
vsednin@bntu.by

Analytical Solution of the Mathematical Model of Anaerobic Fermentation in a Flow Bioreactor for Biogas Production

V. A. Sednin¹⁾, P. P. Khramsov¹⁾, N. A. Sednin¹⁾

¹⁾Belarusian National Technical University (Minsk, Republic of Belarus)

Abstract. The article briefly considers the current state and prospects for the development of biogas (biomethane) production technologies during organic waste recycling. The relevance of the problem is determined by the fact that the experience of operating biogas complexes in the conditions of the Republic of Belarus during biogas generation only from organic waste has shown low economic efficiency. At the same time, solving the important task of recycling industrial and household waste while simultaneously obtaining an energy resource and organic fertilizer is not only necessary, but also an attractive result from both the environmental and energy production points. The state of this problem abroad shows the presence of potential for the development of biotechnology in our country both in the technological and in the system-constructive design of biogas complexes. The implementation of this potential in practice presupposes that the developers have an adequate mathematical apparatus describing the transfer processes in bioreactors. An analytical solution of the mathematical model of the organic waste fermentation process is given, which is supposed to be used to study the transfer processes in flow-type biotanks when designing hybrid energy-technological systems for biogas generation using alternative energy sources. It is shown that the mathematical model obtained as a result of the analytical review for the study is in good agreement with the empirical data obtained to describe the continuous operation of a flow-through bioreactor, and is in good agreement with the results of numerical calculations of analytical models by a number of other researchers. This analytical solution makes it possible to determine the characteristic dependences of the biogas production rate, the dynamics of its generation rate, changes in the concentration of nutrient absorbed by bacteria, and the concentration of bacteria in a flow-type bioreactor depending on the rate of nutrient supply to the bioreactor. The obtained solutions are expected to be used in the synthesis of control algorithms for the developed multi-resource hybrid energy technology system for generating and enriching biogas of a flow-storage type using alternative energy sources.

Keywords: anaerobic digestion, biogas, flow-type biotanks, renewable energy sources, decarbonization, integrated systems, mathematical model, multistage process, continuous mode, waste treatment, control

For citation: Sednin V. A., Khramsov P. P., Sednin N. A. (2025) Analytical Solution of the Mathematical Model of Anaerobic Fermentation in a Flow Bioreactor for Biogas Production. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 68 (3), 259–273. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2025-68-3-259-273> (in Russian)

Введение

Рост и накопление органических отходов в процессе человеческой деятельности в производстве и быту вызывают серьезную экологическую проблему. Одним из подходов к решению этой проблемы является метанизация этих отходов с применением биогазовых технологий. Однако сегодня в условиях Республики Беларусь производство биогаза далеко не всегда экономически оправдано, хотя, несомненно, является предпочтительным с экологической точки зрения, особенно при переработке постоянного потока отходов. Перспективность биогазовых технологий объясняется и тем, что они занимают особое место среди возобновляемых источников энер-

гии (ВИЭ) из-за экологической чистоты в отличие от разрекламированных кампаний использования солнечной и ветровой энергии [1, 2].

По данным [3], полноценное использование биогаза может привести к сокращению глобальных выбросов парниковых газов на 10–13 % и обеспечить утилизацию бытовых и производственных отходов. При этом биогазовые технологии являются важнейшим источником производства энергии. Растущий спрос на биогаз в мировом масштабе энергетического сектора привел к значительному росту установленной мощности по его производству, которая в 2024 г. достигла 21,4 ГВт. Таким образом, это имеет важное значение из-за существующих экологических проблем, ограниченных запасов нефти и энергетической безопасности [4].

В период с 2010 по 2020 г. в Европе наблюдался значительный рост строительства биогазовых установок. Так, по состоянию на 2021 г., их действующее количество достигло 19 тыс., общая установленная мощность более тысячи из которых составляла 167 ТВт·ч [5], а суммарное производство – около 21 млрд м³ биогаза и биометана. Предполагается, что к 2030 г. производство увеличится 1,5–2 раза, а к 2050 г. – в восемь раз. По данным Международного энергетического агентства [6], общее мировое производство биотоплива составило в 2018 г. почти 154 млрд м³. Лидерами по производству биогаза в Европе являются Германия, Чехия, Великобритания, Италия и Франция.

В последние десятилетия исследованию технологических процессов метанового брожения, конструирования и проектирования биогазовых комплексов посвящено значительное количество научных работ российских и зарубежных ученых [7–18]. Сравнительный анализ технико-экономических показателей биогазовых комплексов ведущих мировых производителей свидетельствует, что наилучшие показатели по скорости сбраживания (времени, требуемого для процесса сбраживания для заданной полноты разложения органических отходов) достигнуты на установках фирм «Колорадо биогаз» (США), «Липп» (ФРГ), «Биосистем» (Швеция) и «Клаухан» (Дания) [1, 13–23]. Выделяют два направления развития в конструировании реакторов: крупные вертикальные метантенки, собираемые на месте, и модульные горизонтальные. В лучших установках достигнута экспозиция сбраживания 11–12 сут. благодаря введению предобработки сбраживаемой массы в предкамере, организации многостадийности за счет применения секционной конструкции реактора, создаваемой поперечными перегородками. И те и другие типы установок имеют свои преимущества и недостатки, что указывает на потенциальные возможности совершенствования существующих и создания новых типов конструкций биогазовых установок и требует дальнейшего исследования процессов сбраживания [24, 25].

Таким образом, несмотря на многочисленные исследования процессов синтеза биогаза и успехи в их практической реализации, основные закономерности и механизмы отдельных стадий брожения изучены недостаточно [1]. Тем не менее технология процесса генерации биогаза пока не полу-

чила своего точного математического описания, хотя исследователями предложен целый ряд зависимостей, описывающих кинетику процесса [8]. Исследование технологии производства биогаза в инновационных многоступенчатых схемах [7] требует владения математическим аппаратом, детально описывающим процессы биомеханического брожения, с учетом основных факторов, определяющих производительность биогазовых установок: температуры процесса, значения pH , скорости загрузки суспензий и т. д. [1].

Для представления в математическом описании процесса генерации биогаза чаще всего используют приближенные модели, отражающие удельную скорость роста микроорганизмов в виде функции от концентрации субстрата. Так, в ряде работ [7–10, 14, 15] представлено существенное множество математических моделей, в которых сделаны попытки описать различные биотехнологические процессы, в том числе и метаногенез, что позволяет судить об отсутствии единой универсальной модели, охватывающей широкий круг процессов сбраживания, отличающихся исходным составом стока, условиями сбраживания, конструкцией биореактора. На практике чаще используют простейшие модели, например линейную модель Кобозева [9], связывающую скорость реакции через константу скорости, либо модель Моно [8, 16]. В рассмотренных литературных источниках не найдены аналитические решения подобных моделей, как правило, представлены численные решения, которые, как известно, характеризуют исследуемые процессы больше качественно. Тем не менее представленные в [9, 11, 26–28] результаты численных экспериментов достаточно точно описывают основные закономерности процесса анаэробного сбраживания отходов животноводства, растениеводства, органических бытовых отходов, а также специально выращиваемой быстрорастущей биомассы. Однако ввиду громоздкости вычислений численные методы реализации моделей в частных производных мало пригодны к применению в системах автоматизированного управления. Аппроксимация численных решений с применением методов планирования эксперимента может выступать как альтернатива аналитическому решению, но при этом не отражается физика исследуемого процесса и не всегда удается достигнуть требуемой точности решения, что делает актуальным получение аналитического решения.

За основу для получения аналитического решения нами принята «системно-динамическая модель технологического процесса производства биогаза из растительного сырья», представленная в [18], особенностью которой является учет неоднородности сырья из-за возможности в реальных условиях земледелия использовать для генерации биогаза отходы от производства различных растений. Таким образом, обеспечивается возможность включения в состав и подачи в биореактор исходного субстрата, состоящего из любой комбинации отходов растениеводства и побочных продуктов сельскохозяйственной деятельности. А именно это [18]: «растительные остатки традиционных пищевых посевов (солома), качественная биомасса специально выращиваемых культур энергетического назначения

с большим содержанием лабильных сахаров и низкокалорийные и трудно-разлагаемые побочные продукты вспомогательных производств (например, древесные опилки)» и т. п. [18]. Поэтому математическая модель разрабатывалась с учетом различной энергетической ценности и скорости разложения отдельных компонентов вышеуказанной сырьевой базы.

Важным аспектом математической модели [18], которая была нами принята для получения аналитического решения, является требование применения полученного решения задачи к определению состава и параметров исходного субстрата для обеспечения нужных характеристик биогаза на выходе из реактора. Таким образом, появляется возможность нахождения оптимальных режимов технологического процесса переработки, имеющихся в распоряжении органических отходов с формированием состава исходного субстрата согласно требованиям к качеству и выходу биогаза. Получение аналитического решения значительно упрощает впоследствии проведение параметрической оптимизации технологического процесса с варьированием параметров, анализом чувствительности и прочих характеристик.

Отличительной чертой рассматриваемых процессов сбраживания является жесткая взаимосвязь роста популяции микробов и выхода метана, ввиду того что последний является сопутствующим продуктом в ходе потребления микробами летучих жирных веществ. Поэтому математическая модель должна учитывать все стадии жизненного цикла роста бактериальной культуры [14, 27, 29–32], включая фазы задержки, ускорения темпов удельного роста, стабилизации темпов роста, замедления роста, нулевого роста и распада (отрицательного роста). Следовательно, в числе независимых параметров в модели должны выступать такие факторы, как температура, кислотность, соотношение фазовых компонентов среды.

Формирование математической модели процесса и ее аналитическое решение

Как следует из представленного выше анализа, не существует единой универсальной модели генерации биогаза путем сбраживания органических отходов различного исходного состава в разных условиях процесса сбраживания и в биореакторах различной конструкции. В каждом конкретном случае выбор модели осуществляется в соответствии с параметрами исходного субстрата, термодинамическими характеристиками процесса сбраживания и др. В большинстве случаев кинетику процесса описывают по одному «лимитирующему» веществу из состава субстрата, полагая, что влиянием прочих можно пренебречь. При этом зависимость от штамма и вида микроорганизмов, а также вида субстрата концентрации лимитирующего вещества в субстрате C_s , связь скорости роста бактерий μ может иметь самый различный характер.

В достаточно простой постановке химико-биотехнологического процесса математические модели сбраживания биомассы приведены в ряде

работа [26, 27, 33, 34], но для их использования на практике требуется наличие информации для конкретизации физико-химико-биологических параметров. Представленные в открытых источниках численные значения этих параметров могут различаться на порядок даже для одного и того же состава субстрата. Тем не менее численные исследования ряда авторов [9, 14, 26, 27] показывают достаточно точные результаты для описания основных закономерностей процесса анаэробного сбраживания самых распространенных видов биомассы.

За исходную нами была принята математическая модель технологического процесса производства биогаза из растительного сырья на основе системы нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка [17]:

$$\begin{aligned}\frac{dC_x}{dt} &= D(C_{x0} - C_x) + \mu C_x + K_d C_x; \\ \frac{dC_s}{dt} &= D(C_{s0} - C_s) + \mu C_x; \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma \mu C_x.\end{aligned}\tag{1}$$

Величина удельной скорости роста μ , которая не может быть бесконечной из-за ограниченной доступности питательных веществ (концентрация субстрата C_s), зависит и от других условий окружающей среды, таких как наличие ингибиторов процесса (концентрация ингибитора I), значение pH , температура T :

$$\mu = \mu(C_x, I, pH, T).$$

Система дифференциальных уравнений для технологического процесса производства биогаза с учетом зависимости удельной скорости роста микроорганизмов от концентрации субстрата, подчиняющейся химической кинетике (модель Кобозева) [20, 22, 24], в свою очередь, имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dC_x}{dt} &= K_s C_s C_x + DC_x; \\ \frac{dC_s}{dt} &= D(C_{s0} - C_s) - \alpha K_s C_s C_x; \\ \frac{dP}{dt} &= \gamma K_s C_s C_x; \\ \mu &= K_s C_s.\end{aligned}\tag{2}$$

Начальные условия для биореактора проточного типа:

$$C_x(0) = C_x^0; C_s(0) = C_s^0; P(0) = 0.\tag{3}$$

Очевидно, что уравнения (2) с начальными условиями (3) образуют задачу Коши, которая удовлетворяет теореме Пеано о разрешимости задачи Коши для ОДУ.

Запишем выражения для концентрации бактерий и концентрации питательного вещества в виде:

$$\begin{aligned} C_x(t) &= C_x^0(t) e^{-Dt}; \\ C_s(t) &= C_s^0(t) e^{-Dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив (4) в (2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dC_x^0}{dt} &= K_s C_x^0 C_s^0 e^{-Dt}; \\ \frac{dC_s^0}{dt} &= DC_s^0 e^{-Dt} - \alpha K_s C_x^0 C_s^0 e^{-Dt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя выражение для $\frac{dC_x^0}{dt}$, полученное из первого уравнения, в уравнение для C_s^0 , соответственно имеем

$$\frac{dC_s^0}{dt} - \alpha \frac{dC_x^0}{dt} = DC_s^0 e^{-Dt}. \quad (6)$$

После однократного интегрирования (6) можно записать

$$C_s^0 - \alpha C_x^0 = C_s^0 e^{-Dt} + C_1. \quad (7)$$

Далее, используя выражения (4) и начальные условия (3), получим

$$C_1 = \alpha C_x^0. \quad (7a)$$

Подставляя выражение для $C_s^0(t)$, полученное из первого уравнения (5), в уравнение для C_x^0 , соответственно получим

$$\frac{dC_x^0}{dt} = K_s C_s^0 C_x^0 - \alpha K_s (C_x^0)^2 e^{-Dt}. \quad (8)$$

Производя в последнем уравнении замену $C_x^0(t) = \frac{1}{U(t)}$, приводим его к виду [35]

$$\frac{dU}{dt} + K_s C_s^0 U = \alpha K_s e^{-Dt}. \quad (9)$$

Записав выражение для $U(t)$ в виде

$$U(t) = f(t)e^{-K_s C_s^0 t} \quad (10)$$

и подставив его в (9), получим

$$\frac{df}{dt} = \alpha K_s e^{(K_s C_s^0 - D)t}. \quad (11)$$

Далее, после однократного интегрирования (11), получим

$$f(t) = \frac{\alpha K_s}{(K_s C_s^0 - D)} e^{(K_s C_s^0 - D)t} + C. \quad (12)$$

Используя выражения (4), (6), (10) и (11) получим:

$$U(t) = \frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} e^{-Dt} + C e^{K_s C_s^0 t}; \quad (13)$$

$$C_x(t) = \frac{1}{\frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} + C e^{(D - K_s C_s^0)t}}. \quad (14)$$

Применяя к (14) начальные условия (3), получим выражение для произвольной константы C

$$C = \frac{1}{C_x^0} - \frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D}. \quad (15)$$

Используя выражения (3), (7), (14) и (15), окончательно получим решение системы уравнений (2) в виде:

$$C_x(t) = \frac{1}{\frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} + \left(\frac{1}{C_x^0} - \frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} \right) e^{(D - K_s C_s^0)t}}; \quad (16)$$

$$C_s(t) = C_s^0 + \alpha C_x^0(t) e^{-Dt} - \frac{\alpha}{\frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} + \left(\frac{1}{C_x^0} - \frac{\alpha K_s}{K_s C_s^0 - D} \right) e^{(D - K_s C_s^0)t}}.$$

На рис. 1–3 представлены графики динамики концентрации бактерий, концентрации питательного вещества и скорости производства биогаза в биореакторе проточного типа для трех значений скорости ($D = 0,10; 0,42; 0,60$) подачи питательных веществ в биореактор. Характер кривых динамики концентрации бактерий (рис. 1) в биореакторе проточного типа показывает, что при низких значениях скорости подачи питательных веществ в биореактор концентрация бактерий не достигает стационарных значений даже спустя тридцать дней от начала процесса. Это свидетель-

стует о необходимости расчета оптимальных значений скорости подачи питательных веществ. Из анализа вида кривых для динамики концентрации питательного вещества (рис. 2) следует, что исследуемая математическая модель достаточно хорошо согласуется с эмпирическими зависимостями для описания непрерывного режима подачи субстрата. При этом надо отметить, что решения (16) имеют физический смысл только если $D \leq K_s C_{s0}$. В стационарном режиме работы проточного биогазового реактора при $t \rightarrow \infty$ формулы (16) принимают вид:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_x(t) = \frac{K_s C_s^0 - D}{\alpha K_s};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_s(t) = \frac{D}{K_s}.$$
(17)

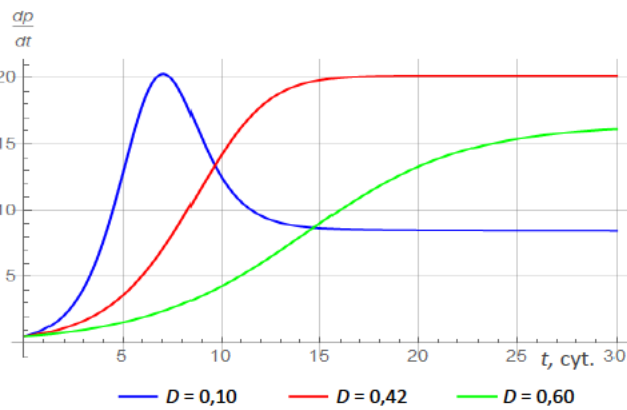


Рис. 1. Динамика концентрации бактерий в биореакторе проточного типа в зависимости от скорости подачи питательных веществ

Fig. 1. Dynamics of bacterial concentration in a flow-type bioreactor depending on the rate of nutrient supply

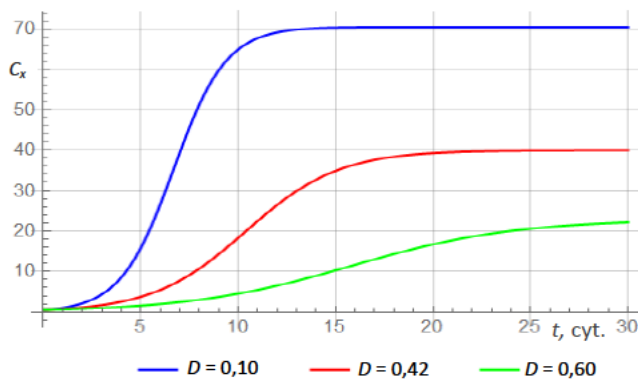


Рис. 2. Динамика концентрации питательного вещества, усвояемого бактериями в биореакторе проточного типа, в зависимости от скорости подачи питательных веществ

Fig. 2. Dynamics of nutrient concentration absorbed by bacteria in a flow-type bioreactor depending on the rate of nutrient supply

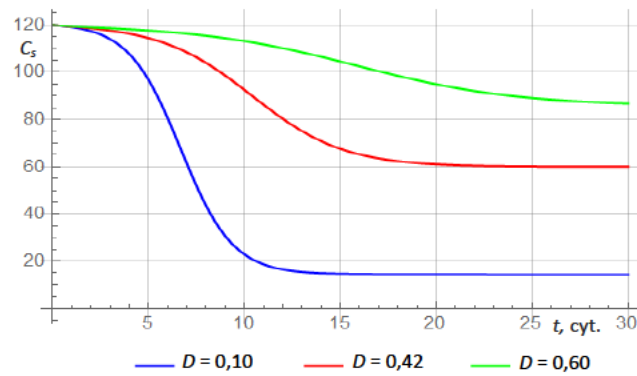


Рис. 3. Динамика скорости производства биогаза в биореакторе проточного типа в зависимости от скорости подачи питательных веществ

Fig. 3. Dynamics of biogas production rate in a flow-type bioreactor depending on the rate of nutrient supply

Профили кривых для динамики скорости производства биогаза (рис. 3) показывают, что при низких значениях скорости подачи питательных веществ в биореактор скорость производства биогаза имеет характерный максимум с последующим спадом, обусловленным недостаточным питанием бактерий, популяция которых чрезмерно размножилась за счет значительного начального количества питательных веществ. Величина скорости выхода биогаза в стационарном режиме работы проточного биогазового реактора

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dP}{dt} = \frac{\gamma D (K_s C_s^0 - D)}{\alpha K_s}. \quad (18)$$

Для того чтобы найти оптимальный режим подачи питательных веществ в биореактор, приравняем к нулю первую производную от величины скорости выхода биогаза по параметру D

$$\frac{d^2 P}{dt dD} = \frac{\gamma D (K_s C_s^0 - 2D)}{\alpha K_s} = 0. \quad (19)$$

Из (19) следует, что для $\frac{d^2 P}{dt dD} = 0$ скорость подачи питательных веществ в биореактор должна определяться выражением $D = \frac{1}{2} K_s C_s^0$. В этом

случае максимальная величина скорости выхода биогаза в стационарном режиме работы проточного биогазового реактора будет определяться выражением

$$G_{\max} = \frac{\gamma K_s (C_s^0)^2}{4\alpha}.$$

На рис. 4 представлена зависимость скорости производства биогаза в биореакторе проточного типа от скорости подачи питательных веществ. Как и предполагалось, максимум производства биогаза наблюдается в области оптимальной скорости подачи питательных веществ в биореактор.

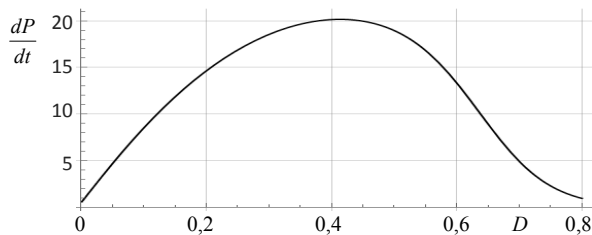


Рис. 4. Зависимость скорости производства биогаза в биореакторе проточного типа от скорости подачи питательных веществ

Fig. 4. The dependence of the biogas production rate in a flow-type bioreactor on the rate of nutrient supply

ВЫВОДЫ

1. Одним из наиболее перспективных направлений развития биоэнергетики является разработка научно-технологических основ создания многосырьевой гибридной энерготехнологической системы генерации и обогащения биогаза проточно-накопительного типа, состоящей из нескольких корпусов гидравлически последовательно связанных колонн непрерывного действия, в которой необходимо свести к минимуму температурную неоднородность и организовать рациональный отвод ингибирующих продуктов жизнедеятельности бактерий в биореакторе. Для обеспечения оптимального температурного режима в биореакторе необходимо использовать теплоту региональных альтернативных источников энергии, включая энергию побочных энергетических потоков, таких как энергия теплоносителя в системах охлаждения солнечных фотоэлементов, низкотемпературный потенциал конденсации водяных паров, выхлопных газов энергетических систем, использующих биогаз в качестве топлива и т. п.

2. В ходе исследований использованы математическая модель технологического процесса и ее аналитическое решение. Полученные результаты показали, что исследованная математическая модель достаточно хорошо согласуется с эмпирическими зависимостями для описания непрерывного режима подачи субстрата в проточный биореактор и находится в хорошем согласии с результатами численных расчетов, представленными в открытом информационном пространстве [26, 27, 35]. Выявлена характерная зависимость темпов производства биогаза от скорости подачи питательных веществ в биореактор.

3. Полученные решения в дальнейшем планируется применять в системе управления разрабатываемой многосырьевой гибридной энерготех-

нологической системой для генерации и обогащения биогаза проточно-накопительного типа с использованием альтернативных источников энергии.

Обозначения:

$C_x(t)$ – концентрация бактерий, кг/м³;
 $C_s(t)$ – концентрация питательного вещества, усвояемого бактериями, кг/м³;
 P – выход биогаза, м³;
 D – скорость подачи питательных веществ в биореактор, сут.⁻¹;
 K_s – коэффициент скорости роста бактерий, м³/(кг·сут.);
 α – безразмерный коэффициент освоения бактериями питательного вещества;
 γ – коэффициент превращения питательного вещества в биогаз, м³/кг.

Legend:

$C_x(t)$ – bacteria concentration, kg/m³;
 $C_s(t)$ – concentration of nutrient absorbed by bacteria, kg/m³;
 P – biogas yield, m³;
 D – rate of nutrient addition to the bioreactor, day⁻¹;
 K_s – bacterial growth rate coefficient, m³/(kg·day);
 α – dimensionless coefficient of nutrient absorption by bacteria;
 γ – coefficient of nutrient conversion into biogas, m³/kg.

ЛИТЕРАТУРА

1. Седнин, В. А. Современное состояние и основные тенденции развития систем генерации биогаза / В. А. Седнин, П. П. Храмцов // *Энергоэффективность*. 2024. № 8. С. 8–13.
2. Зеленуха, Е. В. Обоснование использования биогаза для производства энергии в Республике Беларусь / Е. В. Зеленуха [и др.] // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2024. Т. 67, № 6. С. 530–543. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2024-67-6-530-543>.
3. Global bioenergy statistics 2022 // World Bioenergy Association. URL: <https://www.worldbioenergy.org/uploads/221223%20WBA%20GBS%202022.pdf>.
4. Biofuels and their sources of production: A review on cleaner sustainable alternative against conventional fuel, in the framework of the food and energy nexus / S. Mahapatra, D. Kumar, B. Singh, P. K. Sachan // *Energy Nexus*. 2021. Vol. 4. Art. 100036. <https://doi.org/10.1016/j.nexus.2021.100036>.
5. European Biogas Association: [website]. Available at: <http://european-biogas.eu>.
6. Emerging technologies for biofuel production: A critical review on recent progress, challenges and perspectives / T. G. Ambaye, M. Vaccari, A. Bonilla-Petriciolet [et al.] // *Journal of Environmental Management*. 2021. Vol. 290. Art. 112627. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2021.112627>.
7. Шукина, Т. В. Биогаз – перспективы и возможности производства / Т. В. Шукина // *Изв. вузов. Прикладная химия и биотехнология*. 2012. № 1(2). С. 113–118.
8. Ковалев, А. А. Технологии и технико-энергетическое обоснование производства биогаза в системах утилизации навоза животноводческих ферм: автореф. дис. д-ра техн. наук: 05.14.08. / А. А. Ковалев; Всерос. НИИ электрификации сел. хоз-ва. М., 1998. 36 с.
9. Компьютерное моделирование биотехнологических процессов и систем: учеб. пособие / Д. С. Дворецкий, С. И. Дворецкий, Е. И. Муратова, А. А. Ермаков. Тамбов: Тамбовский гос. техн. ун-т (ТГТУ), 2005. 80 с.
10. Исаков, В. Г. Энергетическая эффективность малого биореактора в различных климатических зонах / В. Г. Исаков, А. А. Абрамова, М. Ю. Дягелев // *Энергетика. Изв. высш. учеб. заведений и энерг. объединений СНГ*. 2020. Т. 63, No 4. С. 355–364. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2020-63-4-355-364>.

11. Кафаров, В. В. Математическое моделирование основных процессов химических производств: учеб. пособие для вузов / В. В. Кафаров, М. Б. Глебов. М.: Высш. школа, 1991. 400 с.
12. Mandy, G. An Analysis of Available Mathematical Models for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas / G. Mandy, R. Span // International Gas Union IGRC 2008. Paris, 2008. URL: https://www.researchgate.net/profile/Mandy-Gerber/publication/283518957_An_analysis_of_available_mathematical_models_for_anaerobic_digestion_of_organic_substances_for_production_of_biogas/links/53d0be4d0cf2fd75bc5d3e8f/An-analysis-of-available-mathematical-models-for-anaerobic-digestion-of-organic-substances-for-production-of-biogas.pdf.
13. Bastin, G. On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors / G. Bastin, D. Dochain. Oxford – New Yourk – Tokyo: Elsevier, 1990. 377 p.
14. Review of Mathematical Models / B. Velázquez-Martí, O. W. Meneses-Quelal, J. Gaibor-Chavez, Z. Niño-Ruiz // Anaerobic Digestion Process / ed. J. R. Banu. Intechopen, 2018. P. 80815. <https://doi.org/10.5772/intechopen.80815>.
15. Математическое моделирование процесса получения биогаза при переработке органических отходов / Л. А. Кушеев, Д. Ю. Суслов, А. И. Алифанова, Н. Ю. Никулин // Экология и промышленность. 2011. № 3 (28). С. 81–84.
16. Ружинская, Л. И. Математическое моделирование процессов анаэробного сбраживания органического субстрата: обзор / Л. И. Ружинская, А. А. Фоменкова // Scientific Journal "ScienceRise". 2014. № 4/2 (4). С. 63–69.
17. Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодник, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек; пер. с чеш. И. Е. Зино. М.: Мир, 1991. 368 с.
18. Баадер, В. Биогаз: теория и практика: пер. с нем. / В. Баадер, Е. Доне, М. Бренндерфер. М.: Колос, 1982. 148 с.
19. A High Efficient Heat Exchanger with Twisted Geometries for Biogas Process with Manure Slurry / J. Chen, M. Risberg, L. Westerlund // Applied Energy. 2020. Vol. 279. Art. 115871. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115871>.
20. Simulation and Experimental Performance of a Solar-Heated Anaerobic Digester / P. Axaopoulos, P. Panagakis, A. Tsavdaris, D. Georgakakis // Solar Energy. 2001. Vol. 70. P. 155–164. [https://doi.org/10.1016/s0038-092x\(00\)00130-4](https://doi.org/10.1016/s0038-092x(00)00130-4).
21. Application of Solar Assisted Bioreactor for Biogas Production From Palm Oil Mill Effluent Co-digested with Cattle Manure / Z. B. Khalid, Md. N. I. Siddique, M. Nasrullah [et al.] // Environmental Technology & Innovation. 2019, Vol. 16. P. 332–343. <https://doi.org/10.1016/j.eti.2019.100446>.
22. Величко, В. В. Повышение эффективности биогазовых технологий / В. В. Величко, С. П. Кундас, Н. Ф. Капустин // Энергоэффективность. 2017. № 7. С. 10–12.
23. Athinas, S. Rambling Facets of Manure – Based Biogas Production in Europe: A Briefing / S. Athinas, G. J. Willem Eurerink // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2020. Vol. 119. Art. 109566. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.109566>.
24. Gerardi, M. H. The Microbiology of Anaerobic Digesters / M. H. Gerardi. New Jersey: John Wiley&Sons, Inc. 2003. 188 pp. <https://doi.org/10.1002/0471468967>.
25. Biogas from Waste and Renewable Resources. An Introduction / eds. D. Deublein, A. Steinhauser. Weinheim: WILEY-VCH Verlag GmbH & Co, 2008. 443 pp. <https://doi.org/10.1002/9783527621705>.
26. Королев, С. А. Идентификация математической модели и исследование различных режимов метаногенеза в мезофильной среде / С. А. Королев, Д. В. Майков // Компьютерные исследования и моделирование. 2012. Т. 4, вып. 1. С. 131–141.
27. Королев, С. А. Исследование стационарных решений и оптимизация параметров математической модели метаногенеза / С. А. Королев, Д. В. Майков, И. Г. Русяк // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2012. № 3. С. 15–21.
28. Шимова, Ю. С. Моделирование биотехнологических процессов: учеб. пособие / Ю. С. Шимова. Красноярск: СибГУ им. М. Ф. Решетнева, 2018. 96 с.
29. Бирюков, В. В. Основы промышленной биотехнологии / В. В. Бирюков. М.: Колос, 2004. 296 с.

30. Смирязев, А. В. Моделирование в биологии и сельском хозяйстве: учеб. пособие. 3-е изд., испр. / А. В. Смирязев, А. В. Исачкин, Л. К. Панкина. М.: Из-во РГАУ-МСХА, 2015. 153 с.
31. Angelidaki, I. A Comprehensive Model of Anaerobic Bioconversion of Complex Substrates to Biogas / I. Angelidaki, L. Ellegaard, B. K. Ahring // *Biotechnology and bioengineering*. 1999. Vol. 63, No 3. P. 363–372. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0290\(19990505\)63:3<363::aid-bit13>3.0.co;2-z](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0290(19990505)63:3<363::aid-bit13>3.0.co;2-z).
32. Campbell, G. S. An Introduction to Environmental Biophysics / G. S. Campbell, J. M. Norman. New York: Springer-Verlag, 1998. 286 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1626-1>.
33. Паников, Н. С. Кинетика роста микроорганизмов / Н. С. Паников. М.: Наука. 1991. 310 с.
34. Вавилин, В. А. Моделирование деструкции органического вещества сообществом микроорганизмов / В. А. Вавилин, В. Б. Васильев, С. В. Рыгов. М.: Наука, 1993. 204 с.
35. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. М.: Наука, 1966. 260 с.

Поступила 10.11.2022 Подписана в печать 11.01.2023 Опубликована онлайн 30.05.2025

REFERENCES

1. Sednin V. A., Khramtsov P. P. (2024) The Current State and Main Trends in the Development of Biogas Generation Systems. *Energoeffektivnost'* [Energy efficiency], (8), 8–13 (in Russian).
2. Zelianukha A. V., Tsyhanava H. A., Belskaya H. V., Khrypovich H. A. (2024) Justification of the Use of Biogas for Power Generation in the Republic of Belarus. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 67 (6), 530–543. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2024-67-6-530-543> (in Russian).
3. Global Bioenergy Statistics 2022. *World Bioenergy Association*. Available at: <https://www.worldbioenergy.org/uploads/221223%20WBA%20GBS%202022.pdf>.
4. Mahapatra S., Kumar D., Singh B., Sachan P. K. (2021) Biofuels and Their Sources of Production: A Review on Cleaner Sustainable Alternative Against Conventional Fuel, in the Framework of the Food and Energy Nexus. *Energy Nexus*, 4, 100036. <https://doi.org/10.1016/j.nexus.2021.100036>.
5. European Biogas Association. Available at: <http://european-biogas.eu>.
6. Ambaye T. G., Vaccari M., Bonilla-Petriciolet A., Prasad S., van Hullebusch E. D., Rtimi S. (2021) Emerging Technologies for Biofuel Production: A Critical Review on Recent Progress, Challenges and Perspectives. *Journal of Environmental Management*, 290, 112627. <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2021.112627>.
7. Shchukina T. V. (2012) Biogas: prospects and production opportunities. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya Khimiya i Biotekhnologiya = Proceedings of Universities. Applied Chemistry and Biotechnology*, (1), 113–118 (in Russian).
8. Kovalev A. A. (1998) *Technologies and Feasibility Study of Biogas Production in Manure Recycling Systems of Livestock Farms* [Dissertation]. Moscow, All-Russian. Research Institute of Rural Electrification. 36 (in Russian).
9. Dvoretiskii D. S., Dvoretiskii S. I., Muratova E. I., Ermakov A. A. (2005) *Computer Simulation of Biotechnological Processes and Systems*. Tambov, Tambov State Technical University (TSTU). 80 (in Russian).
10. Isakov V. G., Abramova A. A., Dyagelev M. Yu. (2020) Energy Efficiency of a Small Bioreactor in Various Climatic Zones. *Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.* 63 (4), 355–364. <https://doi.org/10.21122/1029-7448-2020-63-4-355-364> (in Russian).
11. Kafarov V. V., Glebov M. B. (1991) *Mathematical Simulation of the Main Processes of Chemical Production*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. 400 (in Russian).
12. Geber M., Span R. (2008) An Analysis of Available Mathematical Models for Anaerobic Digestion of Organic Substances for Production of Biogas. *International Gas Union IGRC 2008*. Paris. Available at: https://www.researchgate.net/profile/Mandy-Gerber/publication/283518957_An_analysis_of_available_mathematical_models_for_anaerobic_digestion_of_organic_substances_for_production_of_biogas/links/53d0be4d0cf2fd75bc5d3e8f/An-analysis-of-available-mathematical-models-for-anaerobic-digestion-of-organic-substances-for-production-of-biogas.pdf.
13. Bastin G., Dochain D. (1990) *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Amsterdam – Oxford – New Yourk – Tokyo, Elsevier. 377.

14. Velázquez-Martí B., Meneses-Quelal, O. W., Gaïbor-Chavez J., Niño-Ruiz Z. (2019) Review of Mathematical Models for the Anaerobic Digestion Process. Banu J. R. (ed.). *Anaerobic Digestion*. Intechopen. <https://doi.org/10.5772/intechopen.73348>.
15. Kushcheev L. A., Suslov D. Y., Alifanova A. I., Nikulin N. Yu. (2011) Mathematical Simulation of the Biogas Production Process during the Processing of Organic Waste. *Ekologiya i Promyshlennost'* [Ecology and Industry], (3), 81–84 (in Russian).
16. Ruzhinskaya L. I., Fomenkova A. A. (2014) Mathematical Simulation of the Processes of Anaerobic Digestion of an Organic Substrate. Review. *ScienceRise*, (4/2), 63–69 (in Russian).
17. Kholodniok M., Klich A., Kubichek M., Marek M. (1991) Methods of Analysis of Nonlinear Dynamic Models. Moscow, Mir Publ. 368 (in Russian).
18. Baader W., Dohne E., Brenndörfer M. (1978) *Biogas in Theorie und Praxis: Behandlung Organischer Reststoffe aus der Landwirtschaft durch Methangärung*. Münster: Darmstadt-Kranichstein Verlag. 134.
19. Chen J., Risberg M., Westerlund L., Jansson U., Lu X., Wang C., Ji X. (2020) A High Efficient Heat Exchanger with Twisted Geometries for Biogas Process with Manure Slurry. *Applied Energy*, 279, 115871. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2020.115871>
20. Axaopoulos P., Panagakis P., Tsavdaris A., Georgakakis D. (2001). Simulation and Experimental Performance of a Solar-Heated Anaerobic Digester. *Solar Energy*, 70 (2), 155–164 [https://doi.org/10.1016/S0038-092X\(00\)00130-4](https://doi.org/10.1016/S0038-092X(00)00130-4).
21. Khalid Z. B., Siddique M. N. I., Nasrullah M., Singh L., Wahid Z. B. A., Ahmad M. F. (2019). Application of Solar Assisted Bioreactor for Biogas Production from Palm Oil Mill Effluent Co-digested with Cattle Manure. *Environmental Technology & Innovation*, 16, 100446. <https://doi.org/10.1016/j.eti.2019.100446>.
22. Velichko V. V., Kundas S. P., Kapustin N. F. (2017) Improving the Efficiency of Biogas Technologies. *Energoeffektivnost'* [Energy efficiency], (7), 10–12 (in Russian).
23. Achinas S., Willem Euerink G. J. (2020) Rambling Facets of Manure-based Biogas Production in Europe: A Briefing. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 119, 109566. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2019.109566>.
24. Gerardi M. H. (2003) *The Microbiology of Anaerobic Digesters*. Hoboken, John Wiley&Sons, Inc. 177. <https://doi.org/10.1002/0471468967>.
25. Deublein D., Steinhauser A. (eds.) (2008) *Biogas from Waste and Renewable Resources. An Introduction*. Weinheim, WILEY-VCH Verlag, 443. <https://doi.org/10.1002/9783527621705>.
26. Korolev S. A., Maykov D. V. (2012) Identification of a Mathematical Model and Research of the Various Modes of Methanogenesis in Mesophilic Environments. *Computer Research and Modeling*, 4 (1), 131–141 (in Russian).
27. Korolev S. A., Maikov D. V., Rusyak I. G. (2012) The Research of Stationary Solutions and the Optimization of Parameters of the Mathematical Model of Methanogenesis. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, (3), 15–21 (in Russian).
28. Shimova Yu. S. (2018) *Modeling of Biotechnological Processes*. Krasnoyarsk, SibSAU named after M. F. Reshetnev. 96 (in Russian).
29. Biryukov V. V. (2004) *Fundamentals of Industrial Biotechnology*. Moscow, Kolos Publ. 296 (in Russian).
30. Smiryayev A. V., Isachkin A. V., Pankina L. K. (2015) *Modeling in Biology and Agriculture*. 3rd Ed. Moscow, RSAU-MTAA Publ. 153 (in Russian).
31. Angelidaki I., Ellegaard L., Ahring B. K. (1999) A Comprehensive Model of Anaerobic Bioconversion of Complex Substrates to Biogas. *Biotechnology and Bioengineering*, 63 (3), 363–372. [https://doi.org/10.1002/\(sici\)1097-0290\(19990505\)63:3<363::aid-bit13>3.0.co;2-z](https://doi.org/10.1002/(sici)1097-0290(19990505)63:3<363::aid-bit13>3.0.co;2-z).
32. Campbell G. S., Norman J. M. (1998) *An Introduction to Environmental Biophysics*. New York, Springer-Verlag Inc. 286. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1626-1>.
33. Panikov N. S. (1991) *Kinetics of Microbial Growth: General Patterns and Ecological Applications*. Moscow, Nauka Publ. 309 (in Russian).
34. Vavilin V. A., Vasiliev V. B., Rytov S. V. (1993) *Modeling the Destruction of Organic Matter by a Community of Microorganisms*. Moscow, Nauka Publ. 202 (in Russian).
35. Kamke E. (1966) *Handbook of Partial Differential Equations of the First Order*. Moscow: Nauka Publ. 260 (in Russian).